

**2017年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題**

2016年8月2日 9:00～12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を除いて5枚1組である。試験開始後に各自確認すること。乱丁、落丁、印刷不鮮明な箇所などがあれば、ただちに監督者に申し出ること。
3. 問題は全部で3題ある。①、②、③の3題すべてに解答すること。
4. 答案用紙は3枚1組である。各自確認すること。ホッチキスを外してはならない。
5. 答案用紙は、1枚目が①用、2枚目が②用、3枚目が③用となっている。間違えないこと。
6. すべての答案用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが、その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること。
8. ③では、選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること。
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合、あるいは計算用紙が足りなくなった場合は、監督者に申し出ること。
10. 試験終了後に提出するものは、3枚1組の答案用紙である。この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい。

記号について：

問題中の \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ整数、有理数、実数、複素数全体のなす集合を表す。

1 V を \mathbb{C} 上の有限次元線形空間とし, $f: V \rightarrow V$ を線形変換とする.

- (1) $\dim V \geq 2$ とする. 任意の 1 次元線形部分空間 $L \subseteq V$ に対し, $f(L) \subseteq L$ をみたすような f をすべて求めよ. 必要ならば, V の適当な基底をとり f の行列表示にて答えてもよい.
- (2) $\dim V \geq 3$ とする. 任意の 2 次元線形部分空間 $P \subseteq V$ に対し, $f(P) \subseteq P$ をみたすような f をすべて求めよ. 必要ならば, V の適当な基底をとり f の行列表示にて答えてもよい.

2 \mathbb{R} 上の連続な複素数値関数 $F(x)$ は

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \max_{0 \leq x \leq 1} |F(x+m)| < \infty$$

をみたすとする.

(1) 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$ は絶対収束することを示せ.

次に, $x \in [0, 1]$ に対し, $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} F(x+m)$ と定める.

(2) $f \in C([0, 1])$ であることを示せ. ただし $C([0, 1])$ は $[0, 1]$ 上の複素数値連続関数の全体を表す.

さらに, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $e_n(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}nx)$, $\hat{F}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e_{-n}(x) dx$

と定める.

(3) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\hat{F}(n) = \int_0^1 f(x)e_{-n}(x) dx$ が成り立つことを示せ.

(4) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < \infty$ を仮定する. このとき, 級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n)e_n(x)$ は, $[0, 1]$ 上で一様

収束し, かつ $f(x)$ に一致することを示せ. これを用いて,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} F(m)$$

が成り立つことを示せ. 必要ならば, 次の(*) は証明せずに用いてもよい.

(*) 『 $g \in C([0, 1])$ が任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\int_0^1 g(x)e_{-n}(x) dx = 0$ をみたすなら

ば, g は恒等的に 0 である.』

3

以下の (1) ~ (12) の 12 問のうちから 4 問を選んで解答せよ. 選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること. 5 問以上選択した答案は無効とする. 以下, $M_n(K)$ は成分が K の要素である n 次正方行列全体の集合を表す.

- (1) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は微分可能関数で, かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$ とする. このとき, f は $(0, \infty)$ 上で一様連続でないことを示せ.
- (2) $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ は \mathbb{R} 上線形独立とする. いま, $f(z)$ は \mathbb{C} 上の有理型関数で $f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z)$ をみたすとする. $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$ が定める複素平面内の点をそれぞれ O, P, Q, R とし, 平行四辺形 $OPQR$ が囲む領域 (境界は含まない) を Ω とする. このとき, $f(z)$ は Ω 内に 1 位の極をただ 1 つもつことはない. これを示せ.
- (3) リー環 $\mathfrak{su}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{X} = -X, \text{trace } X = 0\}$ と $\mathfrak{so}(3) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^tX = -X, \text{trace } X = 0\}$ はリー環として同型か, 理由とともに答えよ. ここでリー環の構造は $[X, Y] = XY - YX$ ($X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ または $\mathfrak{so}(3)$) で与える.
- (4) p を素数とし, k を正の整数とする. 群 G の位数が p^k であるとき, G の中心 $Z(G)$ は非自明であることを示せ.
- (5) 整数環 \mathbb{Z} に $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$ をそれぞれ添加した環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ および $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は素元分解環 (UFD) であるかどうか調べよ.
- (6) 有理数体 \mathbb{Q} に $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を添加した体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ は \mathbb{Q} のガロア拡大であるかどうか調べよ.

(7) ~ (12) は次ページ以降にある.

3

(続き)

(7) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し, f_n は \mathbb{R} 上のルベーグ可積分関数とし,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)| dx < \infty$$

をみたすとする. このとき, $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は \mathbb{R} 上のほとんどすべての点 x で収束することを示せ.

(8) \mathcal{H} を無限次元ヒルベルト空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を \mathcal{H} の正規直交系とする. このとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に弱収束することを示せ. また \mathcal{H} の閉単位球はコンパクトか. 理由とともに答えよ.

(9) 有界な実数列全体のなす実線型空間を X とする. $x = \{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in X$ に対し, $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$ とおき, これにより X にノルムを与える. ただし \mathbb{N} は正整数全体とする. また, $\{k(n, m)\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ を二重添え字を持つ実数列とする.

$$(Kx)(n) = \sum_{m=1}^{\infty} k(n, m)x(m), \quad n \in \mathbb{N}$$

により有界な線型作用素 $K : X \rightarrow X$ が定義されるための必要十分条件を求めよ. またそのとき, K の作用素ノルム $\|K\|$ を求めよ.

(10) ~ (12) は次ページにある.

3 (続き)

(10) n を正の整数とし, n 次元球面を S^n で表す. 任意の可微分関数 $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, その微分写像 $df_x : T_x S^n \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}$ がゼロ写像となるような点 $x \in S^n$ が必ず存在することを示せ. 次に, 可微分写像 $g : S^n \rightarrow S^1$ に対し, その微分写像 $dg_y : T_y S^n \rightarrow T_{g(y)} S^1$ がゼロ写像となるような点 $y \in S^n$ が存在するかどうか調べよ.

(11) n を 2 以上の整数とする. n 次元複素射影空間 CP^n から 1 点 $p \in CP^n$ を除いた空間 $X = CP^n \setminus \{p\}$ の整数係数ホモロジー群を求めよ. 必要ならば, 複素射影空間の整数係数ホモロジー群は既知として用いてもよい.

(12) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ とおき, 写像 $\varphi : H \rightarrow B$ を

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y + 1)^2}, \frac{2x}{x^2 + (y + 1)^2} \right)$$

により定める. このとき, B 上の計量

$$g_B = \frac{4}{(1 - (u^2 + v^2))^2} (du \otimes du + dv \otimes dv)$$

を φ で引き戻した計量 $\varphi^* g_B$ を x, y で表せ. 必要ならば, 複素座標

$$z = x + \sqrt{-1}y, \quad w = u + \sqrt{-1}v$$

を用いて計算してもよい.