2015年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2014 年 7 月 30 日（水）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **5** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ の **3** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **3** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{3}$ では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること．
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $A=(a_{ij})$ を複素 n 次正方行列とする．以下の問に答えよ．

(1) $b,\, c\in\mathbb{C}^n$ に対して，漸化式

$$x_{k+1}=Ax_k+c \quad (k=0,1,2,\ldots), \qquad x_0=b$$

により点列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ を定める．このとき，A の任意の固有値 λ が $|\lambda|<1$ をみたすならば $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ は収束することを示し，その極限点を $A,\, b,\, c$ のうち必要なものを用いて表せ．

(2) A の任意の固有値 λ に対して，ある i が存在して $|\lambda-a_{ii}|\leq\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ が成立することを示せ．

(3) すべての $i=1,2,\ldots,n$ に対して $|a_{ii}|>\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ をみたすものと仮定する．また，A の対角部分（対角成分以外の成分をすべて 0 に変更した行列）を D とおき，$b,\, c\in\mathbb{C}^n$ に対して，漸化式

$$Dy_{k+1}=(D-A)y_k+c \quad (k=0,1,2,\ldots), \qquad y_0=b$$

により点列 $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ を定める．このとき，$\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ は収束することを示し，その極限点を $A,\, b,\, c$ のうち必要なものを用いて表せ．

2 自然数 m に対して多項式 $P_m(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-(m-1))$ を考え，$P_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{m,j}\, x^j$ $(a_{m,j} \in \mathbb{Z})$ と展開する．また，半直線 $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > 0\}$ 上の C^∞ 級関数全体の集合を $C^\infty(\mathbb{R}_+)$ で表し，その上の作用素

$$T\colon f(t) \mapsto t\, f(t), \quad D\colon f(t) \mapsto f'(t)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 関係式 $T^m D^m = \sum_{j=1}^{m} a_{m,j}\,(TD)^j$ が成立することを示せ．

(2) 任意の定数 $C > 0$ に対して，不等式 $\sum_{j=1}^{m} C^j j!\, |a_{m,j}| \leq (C+1)^m m!$ が成立することを示せ．

(3) $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ とし，ある定数 $C > 0$ が存在して，すべての自然数 m に対して不等式

$$\sup_{t>0} |T^m D^m f(t)| \leq C^{m+1} m!$$

が成立するものとする．このとき，f は $\mathbb{R}_+$ 上で実解析的であることを示せ．

(4) $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ とし，ある定数 $C > 0$ が存在して，すべての自然数 m に対して，不等式

$$\sup_{t>0} |(TD)^m f(t)| \leq C^{m+1} m!$$

が成立するものとする．このとき，f は $\mathbb{R}_+$ 上で実解析的であることを示せ．

3 以下の (1) 〜 (12) の 12 問のうちから **4** 問を選んで解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を，$f(0) = f(1) = 0$ をみたすなめらかな関数とする．このとき，$y\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を未知関数とする常微分方程式の初期値問題

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0 \in (0,1)$$

の解は，$\mathbb{R}$ 全体で一意に存在することを示せ．

(2) 実 3 次正方行列全体の集合 $M(3,\mathbb{R})$ に $\mathbb{R}^9$ としての自然な位相を入れるとき，$SO(3) = \{A \in M(3,\mathbb{R}) \mid {}^tA = A^{-1},\ \det A = 1\}$ はコンパクトかつ連結であることを示せ．

(3) $\mathbb{C}$ 上の関数 $\cos(|z|^2)$, $\cos(z^2)$ の正則性と有界性を調べよ．

(4) 実定数 a, b および $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $\varphi(x,y)$ を与えるとき，偏微分方程式と初期条件

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y) + a\frac{\partial u}{\partial x}(t,x,y) + b\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,y) = 0, \quad u(0,x,y) = \varphi(x,y)$$

をみたす $\mathbb{R}^3$ 上の C^1 級関数 $u(t,x,y)$ を求めよ．また，このような $u(t,x,y)$ はただひとつであることを示せ．

(5) f は測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上の可測関数で，$f \geq 0$ かつ

$$\int_X f(x)\, d\mu = 0$$

であるものとする．このとき，ほとんどすべての $x \in X$ に対して $f(x) = 0$ となることを示せ．

(6) 〜 (12) は次ページ以降にある．

3　（続き）

(6) $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間 X を定義域にもつ線形作用素 $A : X \to X$ が自己共役であるための必要十分条件は，任意の $u \in X$ に対して内積 (Au, u) が実数値となることである．これを示せ．

(7) 4 次対称群 S_4 に対して，以下を示せ．

(i) A_4 を 4 次交代群とすると，群の同型 $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立つ．

(ii) $H = \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$ は S_4 の正規かつ可換な部分群である．ただし e は S_4 の単位元とする．

(iii) S_4 は可解群である．

(8) p を素数とする．整数係数の多項式環 $\mathbb{Z}[x]$ の元 f, g がともに $\mathbb{Z}[x]$ において p で割り切れないならば，それらの積 fg も $\mathbb{Z}[x]$ において p で割り切れないことを示せ．また，f が $\mathbb{Z}[x]$ において既約ならば，f は $\mathbb{Q}[x]$ においても既約であることを示せ．

(9) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．また，体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ 上 2 次の拡大体であること，および $\mathbb{Q}$ 上の単純拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ と一致することを示せ．

(10) 2 次元トーラスの第 1 ベッチ数を求めよ．

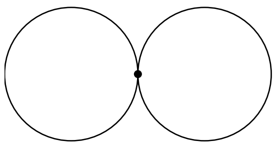
(11) 〜 (12) は次ページにある．

3　（続き）

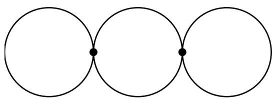
(11) $\gamma\colon [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を弧長でパラメータ付けされたなめらかな平面閉曲線とし，$\kappa\colon [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ を γ の曲率関数とする．このとき，$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^L \kappa(t)\,dt$ は整数値であることを示せ．ただし，J を角度 $\pi/2$ の回転変換とし，$e_1(t) = \gamma'(t)$, $e_2(t) = Je_1(t)$ とおくとき，$\gamma''(t) = \kappa(t)e_2(t)$ をみたす κ を γ の曲率関数と呼ぶ．

(12) 以下の図形 (i)，(ii)，(iii) は図形 (A) の被覆空間であるかを調べよ．

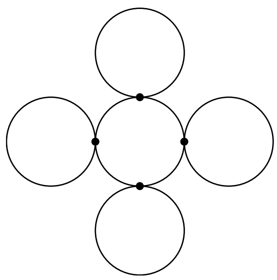
(A)



(i)



(ii)



(iii)