2014年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2013 年 7 月 30 日（火）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ の **3** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **3** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{\mathbf{3}}$ では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること．
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 区間 $[0,\infty)$ 上の関数 f を

$$f(t)=\int_0^\infty e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (t\geq 0)$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) $f(0)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ が収束することを, 部分積分によって示せ.

(2) 任意の $t>0$ に対して, $|f(t)|\leq \dfrac{1}{t}$ が成り立つことを示せ.

(3) f は区間 $(0,\infty)$ 上で微分可能であることを示し, 導関数 $f'(t)$ を求めよ.

(4) (2) と (3) を用いて, $t>0$ に対する $f(t)$ を求めよ.

(5) $\displaystyle\lim_{t\to+0} f(t)=f(0)$ が成り立つことを示せ．また, このことと (4) を用いて, $f(0)$ の値を求めよ.

ヒント： $f(t)-f(0)=\displaystyle\left(\int_0^R+\int_R^\infty\right)(e^{-tx}-1)\,\frac{\sin x}{x}\,dx$ と分けて, (1) と同様な部分積分によって, $t\geq 0$ に無関係な $\displaystyle\int_R^\infty$ の評価を考えよ.

2 正の整数 m, n は $m < n$ をみたすとし, n 次元ベクトル空間 V と V の m 次元部分空間 W, および線型写像 $f : V \to V$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) $\{e_1, \cdots, e_m\}$ を W の基底とする. これに適当な $(n-m)$ 個の V のベクトル e_j $(m+1 \leq j \leq n)$ をつけ加えることによって, $\{e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n\}$ が V の基底となるようにすることができる理由を述べよ.

(2) (1) のようにとった V の基底に関する f の表現行列を $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ とする. $f(W) \subset W$ となるための a_{ij} に対する必要十分条件を, 理由とともに述べよ.

(3) $f(W) \subset W$ であって, かつ f が逆変換 f^{-1} をもつとき, $f^{-1}(W) = W$ であることを示せ.

3 以下の (1) 〜 (12) の 12 問のうちから **4** 問を選んで解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

は C^∞ 級であることを示せ．また, f は実解析的か？　理由とともに答えよ．

(2) $z = 1$ で 1 位の極, $z = -1$ で真性特異点をもち, $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ 上では正則な複素関数 $f(z)$ の例を一つ挙げ, それが実際にそうなっていることを説明せよ．

(3) μ を $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度, $\{u_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ可測関数列とする．任意の $\delta > 0$ に対して $\lim_{k\to\infty} \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |u_k(x)| \ge \delta\}\right) = 0$ が成り立つならば, 適当な部分列 $\{u_{k(j)}\}$ が存在して, $\mathbb{R}^n$ 上ほとんどいたるところで $\lim_{j\to\infty} u_{k(j)}(x) = 0$ となることを示せ．

(4) $n \ge 2$ を整数, A を n 次の実対称行列とする．$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ に対する微分方程式 $x'(t) = Ax(t)$ のすべての解が $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$ となるための必要十分条件は, A のすべての固有値が負であることを示せ．ただし, $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッドノルムである．

(5) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ は弧状連結か？　理由とともに答えよ．ヒント：A から $\mathbb{R}$ への適当な連続関数を考えよ．

(6) 〜 (12) は次ページにある．

3 (続き)

(6) 2 次元球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ \sum_{k=1}^{3} x_k^2 = 1\}$ は単連結であることを示せ．必要ならば, S^2 上の連続な閉曲線を連続的に変形して, S^2 上で与えられた 1 点を通らないようにできることを用いてよい.

(7) 2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ と 2 次元球面 S^2 は位相同型か？　理由とともに答えよ.

(8) 正四面体からすべての面をとり除くことによって, 頂点と辺のみからなる図形が得られる．この図形の第 1 ベッチ数を求めよ.

(9) $\mathbb{F}_3$ を位数 3 の有限体, $GL_2(\mathbb{F}_3)$ を各成分が $\mathbb{F}_3$ の元で行列式が 0 でない 2 行 2 列の行列の全体とするとき, $GL_2(\mathbb{F}_3)$ の元の固有多項式となるような多項式をすべて挙げよ.

(10) G が (位数有限とは限らない) 群で, H が有限個の元からなる G の空ではない部分集合とする．集合 H が (群 G の) 乗法に関して閉じていれば, H は G の部分群であることを示せ.

(11) 多項式 $X^4 - 2$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を L とするとき, L の生成元と $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ．さらに, $L/\mathbb{Q}$ のガロア群 G の各元が L の生成元にどのように作用するかを述べよ.

(12) $\mathbb{R}$ の部分集合 $G = \{x + y\sqrt{2} |\ x^2 - 2y^2 = \pm 1,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ が乗法について群をなし, 1 より大きい G の最小の元が $1 + \sqrt{2}$ であることを示せ.