2013年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2012 年 8 月 1 日（木）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ **の 3 題すべてに解答すること．**
4. 答案用紙は **3 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない．**
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{3}$ **では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること．**
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $x \in \mathbb{R}$ の関数 $D_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$, $\quad \Phi_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$ を

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \ , \ \Phi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

と定める．ただし $i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$ が成り立つこと，および $n = 1, 2, \dots$ に対し $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x)dx = 1$ が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \dots$ に対し，

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\pi \sin\frac{x}{2}} \ , \ \Phi_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

となる（x が 2π の整数倍のときは極限の意味で成り立つ）ことを示せ．

(3) 任意の $\delta \in (0, \pi)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(y)dy = 0$$

が成り立つことを示せ．

(4) $\mathbb{R}$ 上有界かつ一様連続な関数 f に対して，関数列

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(y) f(x+y)dy$$

は $n \to \infty$ のとき f に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ．

2 $\mathbb{R}^n$ 上の標準的なユークリッド内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と表す．線形変換 $x, y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ であって関係式

$$xyx = x\ , \qquad yxy = y$$

を満たすようなものについて考える．このとき，

$$e = yx\ , \quad f = xy$$

とおくことにする．以下の問に答えよ．

(1) $e^2 = e$ と $e\,(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - e) = 0$ を示せ．　また $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(e) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - e)$（直和）を示せ．

(2) x による $\mathrm{Im}(e)$ の像は $\mathrm{Im}(f)$ に含まれることを示せ．

(3) $\mathrm{rank}(e) = \mathrm{rank}(f)$ を示せ．

3 以下の 12 問から 4 問を選択して答えよ．

(1) 位数 6 の有限群を分類せよ．

(2) 領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re z < 1\}$ から単位円板 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ の上への全単射を与える正則関数 $f : D \to \Delta$ を具体的に一つ挙げよ．ここで $\Re z$ は複素数 z の実部である．ヒント：まず正則関数 $z \mapsto e^{i\pi z}$ を D 上で考えよ．

(3) 2 次元球面 S^2 のガウス曲率 $\leq\ 1$ を満たす任意のリーマン計量 g に対し $\mathrm{Vol}(S^2, g) \geq 4\pi$ が成り立つことを示せ．

(4) $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)$（1 の原始立方根）とおく．体の拡大 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2})$ がガロア拡大であることを示し，$\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\alpha)$ となる α をひとつ求めよ．

(5) コンパクト空間 K 上の連続関数全体の空間 $C(K)$ は一様収束ノルム $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$ に関して完備であることを示せ．

(6) $\mathbb{R}^2$ のベクトル場 $X = -x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ の積分曲線によって結ばれる 2 点を同値とみなす同値関係による $\mathbb{R}^2$ の商空間はハウスドルフ空間かどうかを，根拠とともに述べよ．

(7) $p=7$ に対し，環の準同型 $\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)\to\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/(p)$ をすべて求めよ．

(8) 微分方程式系

$$\frac{du}{dt}=u-v,\qquad \frac{dv}{dt}=u-v-w,\qquad \frac{dw}{dt}=-u+v$$

の任意の解は周期 2π をもつ周期関数であることを示せ．

(9) 任意の $n\geq 3$ に対し，種数 n の閉曲面 Σ_n から種数 2 の閉曲面 Σ_2 へのガロア被覆（正規被覆）をひとつ構成せよ．

(10) $M=\mathbb{Z}^3$ とし，$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ により生成される M の部分加群を N とする．商加群 M/N を求め，N が M の直和因子かどうかを根拠とともに述べよ．

(11) $f\in L^1(\mathbb{R})$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\xi)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}f(x)dx$ は $\mathbb{R}$ 上の有界かつ一様連続な関数で，$\displaystyle\lim_{\xi\to\infty}\widehat{f}(\xi)=0$ を満たすことを示せ．必要ならば，$\mathbb{R}$ 上で有界な台をもつ C^1 級の関数全体からなる集合が $L^1(\mathbb{R})$ において稠密であることを用いてよい．

(12) 位相空間 X,Y に対し，X,Y 上の連続関数全体からなるベクトル空間をそれぞれ $C(X),C(Y)$ とする．連続写像 $f:X\to Y$ に対し，線型写像 $f^*:C(Y)\to C(X)$ を $f^*\phi(x)=\phi(f(x))$ ($\phi\in C(Y)$, $x\in X$) と定める．f が単射のとき，f^* は全射か？　もし正しければ証明し，正しくなければ f^* が全射にならないような X, Y, f の例をあげて，それが正しくない例になっている理由を説明せよ．

（2012 年 8 月 1 日） （以上）