2012年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2011 年 8 月 1 日（月）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ **の 3 題すべてに解答すること**．
4. 答案用紙は**3 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{3}$ **では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること**．
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V を有限次元実線型空間とし，$n = \dim V$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) V の双対空間 V^* の定義を述べよ．また，V の基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ に対する V^* の双対基底の定義を述べよ．

(2) ここでは，$V = \mathbb{R}^n$ とする．V の基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ に対する V^* の双対基底を $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ とするとき，

$$v_i^*(w) = \frac{\det(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n)}{\det(v_1, \ldots, v_n)}, \quad w \in V \quad (1 \leq i \leq n)$$

となることを示せ．

(3) ひきつづき，$V = \mathbb{R}^n$ とする．A が n 次の正則行列のとき，連立 1 次方程式 $Ax = b$ の解を与えるクラメルの公式を証明せよ．

(4) ここでは，V に正定値内積が定義されているとする．V^* の正定値内積で次の条件をみたすものが存在し，一意的であることを示せ．

条件：V の任意の正規直交基底に対して，その双対基底が V^* の正規直交基底になる．

2 正の実数 p, r に対して，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合 $B_{n,p,r}$ を

$$B_{n,p,r} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p \le r^p\}$$

で定め，

$$|B_{n,p,r}| = \int_{B_{n,p,r}} dx_1 \ldots dx_n$$

とおく． 以下の問に答えよ．

(1) $|B_{n,p,r}| = r^n |B_{n,p,1}|$ を示せ．

(2) $|B_{n+1,p,1}| = |B_{n,p,1}| \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - |t|^p)^{n/p}\, dt$ を示せ．

(3) $|B_{n,p,1}| = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{p} + 1)} \left(\dfrac{2}{p} \Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right) \right)^n$ を示せ．

(4) $0 < p < q$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|B_{n,p,1}|}{|B_{n,q,1}|}$ を求めよ．

ここで，

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

であり，必要ならば，等式

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$$

および Stirling の公式

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}}{\Gamma(x+1)} = 1$$

を証明なしで使ってよい．

3 以下の (1) 〜 (12) の 12 問のうちから **4 問を選んで**解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) コンパクト位相空間 X の閉集合 F はコンパクトであることを示せ.

(2) 有限群 G に対し自然数 n が存在して，G は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ のある部分群に同型になることを示せ.

(3) $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ を頂点とする立方体を自分自身にうつす $\mathbb{R}^3$ の回転 (行列式の値が 1 である直交行列で表される一次変換) で恒等変換でないものはいくつあるか？

(4) $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかで境界のないコンパクトな曲面には，ガウス曲率が正の点が必ず存在することを証明せよ.

(5) $A \subset \mathbb{R}^n$ を有界可測集合とし，$f : A \to \mathbb{R}$ を非負可測関数とする．f が可積分ならば $\lim_{n\to\infty} n \cdot \mathrm{Vol}(\{x \in A \mid f(x) > n\}) = 0$ を示せ．ここで，Vol は $\mathbb{R}^n$ におけるルベーグ測度を表す．逆にこの極限が 0 ならば非負可測関数 f は可積分か？

(6) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & -11 & 8 \end{pmatrix}$ を，$\mathbb{Z}$-準同型 $L : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ の標準基底に関する表現行列とする．$\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}^2$ の基底で，$\mathbb{Z}$-準同型 L の表現行列が $L_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $L_{11} | L_{22}$ の形になるものを求めよ.

(7) 〜 (12) は次ページにある.

3 （続き）

(7) $\mathbb{R}^3$ 上で定義された C^∞ ベクトル場 X は $\operatorname{div} X = 1$ を満たすものとする．このとき，$\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 関数 $f(x) = \|X(x)\|^2$ は有界でないことを証明せよ．ただし，$\|\ \|$ はベクトルの長さを表す.

(8) 素数 p に対して，環 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{35}]/(p\,\mathbb{Z}[\sqrt{35}])$ を考える．R にベキ零元が存在する p を全て求めよ．また R が整域でない素数 $p \leq 13$ を全て求めよ．

(9) $\mathbb{R}$ 上の超関数 T が $T' = 0$ を満たすとき，ある定数 c が存在して $T(\phi) = c\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx$ であることを示せ.

(10) 複素平面内の閉領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ の上で定義された複素数値有界連続関数 $f(z)$ が，D の内部で正則であり，D の境界の上で実数値をとるものとする．このとき，f は定数関数であることを示せ.

(11) 二次元ユークリッド空間内の閉円板 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ から D 自身への連続写像 ϕ は，不動点をもつことを示せ.

(12) 行列の指数関数を exp で表すとき，$\exp : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は全射であることを示せ．ここで，$M_n(\mathbb{C})$ は複素数を成分とする n 次正方行列全体を，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は，$M_n(\mathbb{C})$ の元で逆行列をもつもの全体を表す.

 （以上）