1 V を標数 0 の体 k 上の $2n$ 次元線形空間, $\langle -,- \rangle : V \times V \to k$ を V 上の双線形形式とする．さらに $\langle -,- \rangle$ は交代形式, つまり

$$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = -\langle \mathbf{y},\ \mathbf{x} \rangle, \qquad \forall \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in V$$

が成立するものとする．以下の問に答えよ．

(1) 交代形式 $\langle -,\ - \rangle$ が非退化であるとは

$$\mathbf{x} \in V,\ \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in V \Rightarrow \mathbf{x} = 0$$

が成立することをいう．$\langle -,\ - \rangle$ が非退化であるとき, どの $\mathbf{e} \in V \setminus \{0\}$ に対しても $\mathbf{f} \in V$ が存在して

$$\langle \mathbf{e},\ \mathbf{f} \rangle = 1$$

となることを示せ.

(2) $\langle -,\ - \rangle$ が非退化であるとき, V の $2n$ 個の元からなる基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ で

$$\langle \mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{f}_i,\ \mathbf{f}_j \rangle = 0 \quad (1 \leq \forall i, j \leq n)$$

$$\langle \mathbf{e}_i,\ \mathbf{f}_j \rangle = -\langle \mathbf{f}_j,\ \mathbf{e}_i \rangle = \delta_{ij} \quad (1 \leq \forall i, j \leq n)$$

となるものがあることを示せ．ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタとする．

(3) $V = k^{2n}$ とし, $A = -\,{}^t\!A$ を $2n \times 2n$ 交代行列とする．このとき

$$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = {}^t\mathbf{x} A \mathbf{y} \quad (\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in V)$$

は V 上の交代形式であることを示せ.

(4) k の元を成分とする $2n \times 2n$ 交代行列 A の行列式 $\det A$ は k 内の平方元, つまり $\det A = \alpha^2 \quad (\alpha \in k)$ であることを示せ.

2 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数 $f(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$, 整数 $n \geq 1$ に対して t の n 次多項式 $f_n(t)$ を

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

で定める. ただし, $\binom{n}{k}$ は二項係数を表す. 以下の問に答えよ.

(1) 実数 x, y に対して次の等式を示せ.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} \quad (n \geq 2).$$

(2) 実数 t に対して次の等式を示せ.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 = \frac{t(1-t)}{n}.$$

(3) ϵ を正の実数とする. 等式

$$f_n(t) - f(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \Big(f(\frac{k}{n}) - f(t) \Big)$$

において, 右辺の和を $\left|\frac{k}{n} - t\right| \leq \epsilon$ の部分と, $\left|\frac{k}{n} - t\right| > \epsilon$ の部分にわけることで $0 \leq t \leq 1$ のとき, 次の不等式を導け.

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \max_{|s-t| \leq \epsilon} |f(s) - f(t)| + 2 \max_{0 \leq s \leq 1} |f(s)| \frac{t(1-t)}{\epsilon^2 n}.$$

(4) 関数列 $\{f_n(t)\}_{n \geq 1}$ が $[0,1]$ 上 $f(t)$ に一様収束することを示せ.

3 以下の (1) ～ (11) の 11 問のうちから **4** 問を選んで解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) $(-,-): H \times H \to \mathbb{C}$ を内積とする Hilbert 空間 H の単位閉球体 $B = \{v \in H \mid (v,v) \leq 1\}$ がコンパクトであるとき H は有限次元であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ の開集合 U で, その閉包 $\overline{U}$ が $\mathbb{R}$ に等しく, かつ U のルベーグ測度が 1 であるものを一つ作れ.

(3) 整数 $n \geq 1$ に対して $[0,1]$ 区間上の非負実数値のルベーグ可積分関数 $f_n(x)$ が与えられており, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ が収束するものとする. このとき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は [0, 1] 上ほとんど至る所収束することを示せ.

(4) U を $\mathbb{C}$ の連結開集合とし, $f: U \to \mathbb{C}$ を U 上の恒等的には零ではない正則関数とする. K を U のコンパクト部分集合とするとき $\{z \in K \mid f(z) = 0\}$ は有限集合であることを示せ.

(5) 実射影平面の基本群を求めよ.

(6) $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ の開部分多様体 $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上定義された以下のベクトル場は完備かどうか, 理由とともに述べよ

(a) $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$

(b) $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$

(c) $X_3 = y\frac{\partial}{\partial x}$

(7) ～ (11) は次ページにある.

3 （続き）

(7) 二次の特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1\}$ に $\mathbb{R}^4 = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ の部分集合としての相対位相を入れる．整数の組 (m,n), $m,n \geq 0$ に対して $SL(2,\mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^m \times S^n$ が同相になることはあるか．なければその理由を，あれば可能なすべての (m,n) を求め，その理由を述べよ．ただし S^n は n 次元球面とする．

(8) 方程式 $f(x) = x^3 - 3$ の $\mathbb{Q}$ 上の分解体 L の次数 $[L:\mathbb{Q}]$ と，拡大 $L/\mathbb{Q}$ のガロア群を求めよ．

(9) 元の数が 4 で単位元を持つ可換環 R を同型を除き決定せよ．

(10) 群 G が指数有限の部分群 H を持つとする．このとき G は指数有限の正規部分群 H' で $H' \subset H$ となるものを持つ事を示せ．

(11) 体 k 上のベクトル空間 V に対し V^* を V の双対空間，つまり V 上の k 値線形写像の全体とする．有限次元ベクトル空間 V とその部分ベクトル空間 W に対し，包含写像 $i : W \hookrightarrow V$ が引き起こす写像 $V^* \to W^*$ $(f \mapsto f \circ i)$ は全射であることを示せ．