2010年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2009 年 7 月 30 日（木）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ の **3** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **3** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{3}$ では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること．
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 有界閉集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ がなめらかな境界 ∂B を持つとき，B を含むある開集合上で C^1 級である 2 変数関数の組 $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ に対しては，ガウスの発散公式 $\int_{\partial B} F \cdot \nu \, dS = \iint_B (f_x + g_y)\, dxdy$ が成立する．ここで，ν は ∂B の各点における ∂B の外向き単位法線ベクトルを表す．また，開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の関数 $u(x,y)$ が調和関数であるとは，実数値かつ C^2 級であり U 上で常に $u_{xx} + u_{yy} = 0$ をみたすことをいう．以下の問に答えよ．

(1) 中心が (a,b) で半径が $\rho > 0$ の開円板 $U_\rho(a,b)$ 上の調和関数 $u(x,y)$ に対し，関数 $\varphi(r)$ を

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\, d\theta \qquad (0 < r < \rho)$$

で定義する．このとき $\varphi'(r) = 0$ が成り立つことを示せ．また，

$$\begin{aligned} u(a,b) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2 \le r^2} u(a+x, b+y)\, dxdy \qquad (0 < r < \rho) \end{aligned}$$

が成立することを示せ．

(2) 開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の調和関数 $u(x,y)$ が，点 $(a,b) \in U$ において最大値 M をとるものとする．このとき，$u(x,y)$ は (a,b) のある近傍において恒等的に M に等しいことを示せ．

(3) また (2) において，集合 $A = \{(x,y) \in U \mid u(x,y) = M\}$ は U の閉集合であることを示せ．

(4) 連結開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の調和関数 $u(x,y)$ が最大値をもつならば，$u(x,y)$ は定数関数に限ることを示せ．

2 複素数を成分とする n 次正方行列全体を $M(n,\mathbb{C})$ とする．$M(n,\mathbb{C})$ には $\mathbb{C}^{n\times n}$ と同一視した標準的な位相が入っているものとする．$X \in M(n,\mathbb{C})$ に対して，以下の問に答えよ．

(1) 級数

$$\exp X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

は収束することを示せ．

(2) $X + {}^tX = O$ のとき $\exp X \, {}^t(\exp X) = I$ となることを示せ．ここで，${}^tX, {}^t(\exp X)$ はそれぞれ $X, \exp X$ の転置行列とする．また，O は n 次正方零行列，I は n 次単位行列とする．

(3) $\det(\exp X) = \exp(\operatorname{tr} X)$ を示せ．ここで，$\operatorname{tr} X$ は X のトレースとする．

3 以下の (1) 〜 (11) の 11 問のうちから **4** 問を選んで解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) $f : X \to Y$ は位相空間の間の連続写像，Z は Y のコンパクトな部分空間とするとき，逆像 $f^{-1}(Z)$ はコンパクトであるか？ 理由とともに答えよ．

(2) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は C^1 級の写像で，そのヤコビアン J_f が常に $J_f \neq 0$ をみたしているものとする．このとき，f は単射か？ 理由とともに答えよ．

(3) 位数 6 の非可換群を決定せよ．

(4) 体の 3 次拡大はガロア拡大か？ 理由とともに答えよ．

(5) $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ は整閉整域か？ 理由とともに答えよ．

(6) 写像 $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right)$$

で定めるとき，f は 1 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^1$ から単位円周 S^1 への同相写像を定めることを示せ．

(7) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^3 - 2y^2 + z^2 + xy^2 = -1\}$ は，$\mathbb{R}^3$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

(8) $m \neq n$ のとき，球面 S^m と S^n は同相か？ また $\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ はどうか？ 理由とともに答えよ．

(9) 〜 (11) は次ページにある．

3 （続き）

(9) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ はルベーグ測度について積分可能な関数であるとし，$\mathbb{R}$ 上のもうひとつの関数

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|} f(y)\, dy$$

をルベーグ積分を用いて定義する．このとき，u は連続かつルベーグ積分可能であることを示せ．

(10) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ ならば，すべての $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ が収束することを示せ．逆に，すべての $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ が収束するような数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ であることを示せ．

(11) 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域 D において正則な関数 f が，D 上いたるところ単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上の値をとるならば，f は定数関数であることを示せ．