2009年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2008 年 7 月 31 日（木）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ の **3** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **3** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{3}$ では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること．
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $r>0, R>0$ を実数とし，$D=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le t\le r, |x|\le R\}$ とおく．D 上で連続な実数値関数 $f(t,x)$ が次の条件 $(*)$ をみたしているとする．

($*$) ある正数 L が存在し，$|f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y|$ が任意の $(t,x),(t,y)\in D$ に対して成り立つ．

以下，$M=\max_{(t,x)\in D}|f(t,x)|, \quad \alpha=\min\left\{r,\dfrac{R}{M}\right\}$ とおき，$t\in[0,\alpha]$ とする．

(1) $[0,\alpha]$ 上の連続関数 $w(t)$ が $|w(t)|\le R$ をみたせば，$\left|\int_0^t f(s,w(s))ds\right|\le R$ が成り立つことを示せ．

これより， $[0,\alpha]$ 上の連続関数列 $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ が

$$x_0(t)=0, \quad x_{n+1}(t)=\int_0^t f(s,x_n(s))ds \quad (n=0,1,\ldots)$$

により帰納的に定義される．

(2) 任意の $n=0,1,\ldots$ に対し，$|x_{n+1}(t)-x_n(t)|\le \dfrac{M}{L}\dfrac{(Lt)^{n+1}}{(n+1)!}$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ．

(3) 関数列 $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ は $[0,\alpha]$ 上で一様収束することを示せ．

(4) (3) の極限を $x_\infty(t)$ とする．$x(t)=x_\infty(t)$ は常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(t,x(t)), \quad x(0)=0$$

の解であることを示せ．

2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線型変換とする．直線 $L \subset \mathbb{R}^2$ が f の不動直線であるとは，$f(L) \subseteqq L$ をみたすことをいう．以下の問に答えよ．

(1) f の不動直線で，原点を通らないものが存在すれば， f は 1 を固有値にもつことを示せ．

(2) f の不動直線をすべて求めよ．

3 以下の (1) ～ (11) の 11 問のうちから **4** 問を選んで，解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) 群 G が集合 X に（左から）作用しているとし，$x \in X$ とする．G の x における固定化部分群 $H = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ による剰余類の集合 G/H と，x の G 軌道 $Y = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ の間には，全単射が存在することを示せ．

(2) X, Y を位相空間とし，$f, g : X \to Y$ を連続写像とする．Y がハウスドルフの分離公理をみたせば，$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合であることを示せ．

(3) 有理数体 $\mathbb{Q}$ は，$\mathbb{Z}$ 上の代数として有限生成か？ 理由とともに答えよ．

(4) $\mathbb{C}[t^2, t^3]$ の商体内での整閉包は何か．理由とともに答えよ．

(5) $\mathbb{Q}[t]/(t^2-1)$ は体か？ 理由とともに答えよ．また，$\mathbb{Q}[t]/(t^2-2)$ は体か？ 理由とともに答えよ．

(6) X をヒルベルト空間, $\|\cdot\|$ をその内積 $(\cdot,\cdot)$ から定まるノルムとする．また $f, f_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする．このとき，以下の (a) (b) は同値であることを示せ．

(a) $n \to \infty$ のとき，f_n は f に強収束（ノルム収束）する．

(b) $n \to \infty$ のとき，f_n は f に弱収束し，かつ $\|f_n\|$ は $\|f\|$ に収束する．

(7) $\mathbb{R}$ 内の区間 $(0,1)$ 上のルベーグ測度に関する関数空間 $L^1((0,1))$ および $L^p((0,1))$ $(p > 1)$ の間に包含関係はあるか？ 理由とともに答えよ．

(8) ～ (11) は次ページにある．

3 （続き）

(8) $\mathbb{C}$ 上の複素数値関数 $f(z)$ に対し，$\operatorname{supp} f(z) = \overline{\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \neq 0\}}$ （ここで $\overline{}$ は閉包を表す）とおく．いま，$f(z)$ が $\operatorname{supp} f(z) \neq \emptyset$ かつ $\operatorname{supp} f(z) \subset B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ をみたしているとする．このとき，多項式の列 $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ で $f(z)$ に B 上一様収束するものは存在するか？ 理由とともに答えよ．

(9) S^n で n 次元球面を表す．$S^1 \times S^3, S^2 \times S^2, S^4$ は互いに同相でないことを示せ．

(10) n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の整数係数ホモロジー群を答えよ．求め方も簡潔に説明せよ．

(11) 2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ に，ガウス曲率がいたるところ正のリーマン計量は存在するか？ 存在するなら例を一つあげ，存在しないならその理由を説明せよ．