名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００８年度後期課程大学院入学試験問題

2007 年 8 月 1 日（水）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**４枚１組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で３題ある．問題１〜問題３の３題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は**３枚１組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**１枚目が問題１用，２枚目が問題２用，３枚目が問題３用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．

   問題３では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること．
7. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
8. 試験終了後に提出するものは，３枚１組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００８年度後期課程大学院入学試験問題

以下の３題の問題すべてに解答せよ．

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし，d を $\mathbb{R}^n$ 上の通常の距離とする．写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は，ある正の定数 $C < 1$ に対して，

$$d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \qquad (x,\ y \in \mathbb{R}^n)$$

をみたしているとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は連続であることを示せ.

(2) $a \in \mathbb{R}^n$ とし，$\mathbb{R}^n$ 内の点列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ を

$$x_0 = a, \qquad x_k = f(x_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

によって定める．点列 $\{x_k\}$ が収束することを示し，$f(p) = p$ となる点 $p \in \mathbb{R}^n$ が存在することを導け.

(3) $f(p) = p$ をみたす点 $p \in \mathbb{R}^n$ はただ 1 つであることを示せ.

（２００７年８月１日）　　　　　　　　　　　　　　　　（次ページあり）

$\boxed{2}$ n 次実対称行列全体のなす集合を S_n と表す．$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d$ を実数係数の 1 変数多項式とし，$A \in S_n$ に対して $f(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d \in S_n$（$I_n$ は単位行列）とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $A \in S_n$ とし，λ を A の固有値とする．このとき，$f(\lambda)$ は $f(A)$ の固有値であり，A の固有値 λ に対応する固有空間 W は，$f(A)$ の固有値 $f(\lambda)$ に対応する固有空間 U に含まれることを示せ．

(2) 写像 $\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(t) \in \mathbb{R}$ が単射であると仮定する．$A \in S_n$ とし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ を A の相異なる固有値の全体とする．A の固有値 λ_i に対応する固有空間を W_i とし，$f(A)$ の固有値 $f(\lambda_i)$ に対応する固有空間を U_i とするとき，$W_i = U_i$ $(i = 1, \cdots, r)$ となることを示せ．

(3) 写像 $\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(t) \in \mathbb{R}$ が全単射であると仮定する．このとき，写像 $S_n \ni A \longmapsto f(A) \in S_n$ も全単射であることを示せ．

$\boxed{3}$ 以下の (1) 〜 (11) の 11 問のうちから **4 問を選んで**，簡潔に解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合 X に対して，X が連結ならば，X は弧状連結であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数 $f(x)$ で，実解析関数（C^ω 級関数）でないものの例を挙げ，それが例になっていることを説明せよ．

(3) G, H を群，$f : G \to H$ を群準同型写像とする．f の核 $N = \mathrm{Ker}\, f$ による G の剰余群 G/N が f の像 $\mathrm{Im}\, f$ と同型であることを示せ．

(4) $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[X, Y]$ のイデアルで，極大イデアルであるもの，$\{0\}$ でも極大イデアルでもないが素イデアルであるもの，の例を 1 つずつあげ，それらが例になっていることを説明せよ．

(5) K が有限個の元からなる体であるとき，K に含まれる元の個数は素数のべきであることを示せ．

(6) z のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が，$z = z_0$ $(z_0 \neq 0)$ で収束しているならば，領域 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$ で広義一様収束していることを示せ．

(7) H をヒルベルト空間とする．H の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x \in H$ にノルム収束しているとき，$\{x_n\}$ は x に弱収束することを示せ．

(8) 〜 (11) は次ページにある．

$\boxed{3}$ （続き）

(8) $k(x,y)$ が閉区間の直積 $[0,1]\times[0,1]$ 上の可測関数で，$\displaystyle\int_0^1\int_0^1 |k(x,y)|^2 dxdy < \infty$ をみたしているとき，

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy \quad (f \in L^2([0,1]),\ x \in [0,1])$$

によって定義される線型作用素 K が L^2 空間 $L^2([0,1])$ 上の有界作用素であることを示せ．

(9) 実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ が C^∞ 級多様体であることを示せ．($\mathbb{R}P^2$ がハウスドルフ空間であることは証明しなくてよい．）

(10) 2 つの C^∞ 級多様体 M, N の間に微分同相写像 $f : M \to N$ が存在するとき，$\dim M = \dim N$ であることを示せ．

(11) 種数 2 の向きづけられた 2 次元閉曲面 Σ の基本群を求めよ．答えだけでなく求め方も説明せよ．

（以上）