名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００６年度博士課程後期課程入学試験問題

以下の４題の問題すべてに解答せよ．

$\boxed{1}$ 閉区間 $I=[0,1]$ 上の実数値連続関数全体のなす集合を $C(I)$ で表す．以下の問に答えよ．

(1) $C(I)$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上の関数 f に一様収束するとき, $f \in C(I)$ であることを証明せよ.

(2) $f, g \in C(I)$ に対して

$$d(f,g)=\max_{x\in I}|f(x)-g(x)|$$

と定めると, d は $C(I)$ 上の距離である. 距離空間 $(C(I), d)$ が完備であることの意味を述べ, それを証明せよ.

$\boxed{2}$ A を n 次の実対称行列とし, 関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ および $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle, \quad g(x) = \langle x, x \rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

によって定義する. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積を表す. 束縛条件 $g = 1$ の下での関数 f の最小値を λ とするとき, λ は行列 A の固有値であることを証明せよ.

(一般の n で考えにくい場合は, まず $n = 2$ の場合に考えてみよ.)

3 V を有限次元実ベクトル空間とする. W_1, W_2 を V の部分空間とし, $V/W_1, V/W_2$ を商ベクトル空間とする. また, $p\colon V \to V/W_1$, $q\colon V \to V/W_2$ を自然な射影とする. 以下の問に答えよ.

(1) f を V の線形変換とし, $f(W_2) \subset W_1$ をみたすとする. このとき, 線形写像 $g\colon V/W_2 \to V/W_1$ で $p \circ f = g \circ q$ をみたすものが存在することを示せ.
(g がどのように与えられるかを明記すること.)

(2) $W_2 \subset W_1$ のとき, 実ベクトル空間としての同型

$$(V/W_2)\Big/(W_1/W_2) \cong V/W_1$$

が成り立つことを示せ.

(3) $W_1 = W_2 = W$ とし, $W \neq \{0\}$, $W \neq V$ とする. f, g を (1) の通りとするとき, f の W への制限 $f|_W\colon W \to V$ と g とがともにゼロ写像であるならば, f はゼロ写像であるといえるか？ 理由とともに答えよ.

$\boxed{4}$ 以下の問に答えよ.

(1) $u(x,y), v(x,y)$ を平面 $\mathbb{R}^2$ 上の実数値 C^1 級関数とし, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ $(z = x + iy)$ とおく. このようにして得られる $\mathbb{C}$ 上の複素数値関数 $f(z)$ と比較して, $\mathbb{C}$ 上の正則関数が性質上異なる点を一つ挙げよ.

(2) $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ が零点を持たないならば, $f(z) = e^{g(z)}$ となるような $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $g(z)$ が存在することを証明せよ.