名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００４年度後期課程入学試験問題

必修問題： 以下の２題の問題に解答せよ.

$\boxed{1}$ $a, b \in \mathbb{C}$ を定数として,

$$M_{a,b} = \{A \in M_3(\mathbb{C}) \mid A^3 + aA + bE = O\}$$

とおく. ただし, $M_3(\mathbb{C})$ は (3×3) 複素行列全体の集合を表し, $E, O \in M_3(\mathbb{C})$ はそれぞれ単位行列, ゼロ行列である.

(1) 方程式 $x^3 + ax + b = 0$ が重根をもつための必要十分条件は $4a^3 + 27b^2 = 0$ であることを示せ.

(2) $A_1, A_2 \in M_{a,b}$ に対し,

$$A_1 \sim A_2 \Leftrightarrow \exists B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}), \qquad A_1 = B^{-1}A_2B$$

と定義すると, これは $M_{a,b}$ 上の同値関係であることを示せ. ただし, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ は正則行列全体のなす $M_3(\mathbb{C})$ の部分集合を表す.

(3) 上の同値関係による $M_{a,b}$ の同値類の代表系を (a, b) の値に従って分類せよ.

$\boxed{2}$ $\{(x,t,s) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0,\ 0 < t \leq 1,\ 0 \leq s \leq 1\}$ 上で定義された関数

$$f(x,t,s) = e^{-tx}\cos sx$$

に対して広義積分

$$F(t,s) = \int_0^\infty f(x,t,s)dx$$

を考える．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $F(t,s) = \dfrac{t}{t^2+s^2}$ を示せ.

(2) $t > 0$ を固定したとき, 上の広義積分は s に関して一様収束することを示せ.

(3) (1), (2) を用いて,

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

を示せ.

選択問題：以下の３題から１題を選んで解答せよ.

$\boxed{3}$ $f(X) = X^4 - 3X^2 + 25 \in \mathbb{Q}[X]$ に対し, 次の問いに答えよ.

(1) $f(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の分解体 K とその $\mathbb{Q}$ 上のガロア群を求めよ.

(2) p を素数とし, $\zeta_p = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ とする.

$$\phi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathrm{Gal}\,(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$$

を $\phi(a) = \sigma_a$, ただし $\sigma_a(\zeta_p) = \zeta_p^a$, により定義する. ϕ が群の同型であることを用いて, $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_p)$ とはなり得ないことを示せ.

$\boxed{4}$ b を $\mathbb{R}^n$ 上の有界な連続関数とし, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$T_b f = F(b \cdot F^{-1}(f))$$

により $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の線形作用素を定める．ただし, $\cdot$ は掛け算作用素, $F : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto F(f)$ は L^2 関数のフーリエ変換

$$F(f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx \ ,$$

F^{-1} はその逆変換とする．このとき, T_b が $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の有界線形作用素で

$$||T_b f||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}$$

となるための必要十分条件は,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |b(x)| \leq 1$$

であることを証明せよ.

$\boxed{5}$ $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ 上に同値関係 $\sim$ を

$$(z_0, z_1, \ldots, z_n) \sim (w_0, w_1, \ldots, w_n)$$
$$\Leftrightarrow 0 \neq \exists \lambda \in \mathbb{C},\ (z_0, z_1, \ldots, z_n) = \lambda(w_0, w_1, \ldots, w_n)$$

で定義する. その商位相空間を $\mathbb{C}P^n$ と書き, $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ の同値類を $[z_0, z_1, \ldots, z_n] \in \mathbb{C}P^n$ と書く. $\mathbb{C}P^n$ の部分集合 U_1, U_2 を

$$U_1 = \{[z_0, z_1, \ldots, z_n] \in \mathbb{C}P^n \,|\, z_0 \neq 0\}$$
$$U_2 = \{[z_0, z_1, \ldots, z_n] \in \mathbb{C}P^n \,|\, (z_1, \ldots, z_n) \neq (0, \ldots, 0)\}$$

で定めると $\mathbb{C}P^n = U_1 \cup U_2$ である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) U_1 と $U_1 \cap U_2$ の整数係数ホモロジー群をそれぞれ求めよ.

(2) U_2 は $\mathbb{C}P^{n-1} = \{[0, z_1, \ldots, z_n] \,|\, (z_1, \ldots, z_n) \neq (0, \ldots, 0)\}$ にホモトピー同値であることを示せ.

(3) $\mathbb{C}P^n$ の整数係数ホモロジー群を求めよ.

（２００４年２月１２日）　（以上）