# Quantum set theory in a quantale valued set theory

千谷慧子（中部大学名誉教授）

量子論の命題は、その真偽が系の状態に依存し、系の状態はある複素ヒルベルト空間 $H$ のベクトルで表現される。すなわち、量子論の命題は、固有値が 1、0 の何れかである自己共役作用素、 projection で表現される。$H$ 上の projection 全体 $P(H)$ は、range の包含関係を順序として完備オーソモジュラー束である。量子論理は完備オーソモジュラー束の構造を表現するものであり、$P(H)$-valued universe $V^{P(H)}$ における複素数は、 $H$ に作用する正規作用素を表す。$P(H)$ は、$P(H)$ の自己準同系写像全体から成る quantale と呼ばれる完備束 $\mathcal{Q}$ の中に埋め込まれ、$V^{P(H)}$ は $V^{\mathcal{Q}}$ に埋め込まれる。

本講演では、量子力学における観測の公理とされている規則を、$V^{\mathcal{Q}}$ における複素数の性質として表現する。

In quantum mechanics a physical system is described in terms of 'yes-no experiments' depending on *states of the system*, represented by vectors of a Hilbert space, say $H$. Propositions are represented by self-adjoint operators acting on $H$, which is 'either 1(true) or 0(false)' in each eigenstate. Hence, proposition is represented by projections. Quantum logic represents the structure of complete orthomodular lattice $P(H)$ consisting of all projections of $H$. Quantum set theory is a set theory developed in $P(H)$-valued universe $V^{P(H)}$. The lattice $P(H)$ is equal to the union $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} B_U$ of mutually isomorphic complete Boolean sub-algebras $B_U$ of $P(H)$, where $\mathcal{U}$ is the set of all unitary operators on $H$. Each Boolean valued universe $V^{B_U}$ is a sub-universe of $V^{P(H)}$. The set $\mathfrak{C}_{P(H)}$ of complex numbers in $V^{P(H)}$ has the structure of a fibre space over the topological group $\mathcal{U}$ of unitary operators, whose fibres are isomorphic to $H$.

Here we extend the $P(H)$-valued universe to a quantale valued universe $V^{\mathcal{Q}}$, where the quantale $\mathcal{Q}$ is a complete lattice consisting of all endomorphisms of $P(H)$. By doing this, the framework of quantum theory can be viewed from a broader standpoint. The set $\mathfrak{C}_{\mathcal{Q}}$ of complex numbers in $V^{\mathcal{Q}}$ has three parts, which represent ket-vector space, bra-vector space and the set of normal operators acting on $H$.

In this lecture the postulates of quantum theory will be interpreted as properties of complex numbers in the universe $V^{\mathcal{Q}}$.