量子推定理論における漸近的大偏差型評価について

林 正人 [1]　　京都大学 理学研究科 数学教室

目 次

1 はじめに **2**
1.1 適応的な測定選択可能モデルの重要性 . . . 2
1.2 量子力学での適応的な測定選択可能モデルの必要性 . . . 4
1.3 量子相関を用いた推定方法 . . . 4
1.4 概略 . . . 5

2 単一測定モデル **5**

3 適応的な測定選択可能モデル **7**
3.1 適応的な測定選択可能モデルの定式化 . . . 7
3.2 量子力学的でない例 . . . 7
3.3 複合測定 . . . 8
3.4 測定の優越性, 両立性及び部分測定集合の十分性 . . . 8
3.5 推定量と大偏差型評価 . . . 9
3.6 例への適用 . . . 12

4 量子系 **12**
4.1 量子系の状態と測定の定式化 . . . 12
4.2 SLD Fisher 情報行列, 梅垣エントロピー . . . 14
4.3 適応的な測定選択可能モデルとしての大偏差型評価 . . . 15
4.4 量子系での十分性と両立性 . . . 15
4.4.1 十分性 . . . 15
4.4.2 両立性 . . . 16
4.4.3 両立しない射影測定の例 . . . 17
4.5 梅垣エントロピーの評価 . . . 17

5 量子相関を許すモデル **18**
5.1 定式化 . . . 18
5.2 量子相関と梅垣エントロピー . . . 19
5.3 大偏差型評価 . . . 20

[1]e-mail address: masahito@kusm.kyoto-u.ac.jp

6 量子光学系 **21**
6.1 量子光学の基礎 . . . 21
6.1.1 コヒーレント状態 . . . 22
6.1.2 Unitary 作用素との交換関係 . . . 23
6.2 量子光学系での測定 . . . 23
6.2.1 個数測定 . . . 23
6.2.2 ヘテロダイン測定 . . . 23
6.3 状態族 $\mathcal{S}_N$ . . . 24
6.3.1 局所的大偏差型評価 . . . 24
6.3.2 大域的大偏差型評価 . . . 25
6.3.3 まとめ . . . 26
6.4 (52) 及び (53) の下限を達成する推定量の構成 . . . 26
6.4.1 一致推定量 $\{E_r^{(n)}\}$ の構成 . . . 26
6.4.2 一致推定量 $\{E_0^{(n)}\}$ の構成 . . . 27
6.5 ミニマックス法と共変性 . . . 28
6.5.1 ミニマックス法 . . . 28
6.5.2 共変的推定量 . . . 29

7 結論 **30**

A $\{E_r^{(n)}\}$ の一致性の証明 **31**

B 平均化推定量 $\overline{M}$ の構成 **32**

1 はじめに

本稿では測定によって得られたデータから未知の量子状態を統計的に推測する際の誤差の評価を行う. 評価の方法としては一貫して大偏差型で行う. その問題に対して 2 種類の推定方法を考え両者を比較検討する. 1 つ目は以下に述べる 適応的な測定選択可能モデル としての量子状態の推定である. すなわち, 各サンプルに逐次的に測定を行い得られた複数のデータをもとに状態の推測を行う. もう 1 つの方法は複数のサンプルに対して一括した測定 (量子相関を用いた測定) による推定である. 以下ここで述べた諸概念について説明する. その上で本稿の概要について述べる.

1.1 適応的な測定選択可能モデルの重要性

自然科学をはじめ諸科学では, 実験や標本調査などの手法によって, データを抽出することが行われる. 本稿ではこのようにデータを抽出する行為を総称して 測定 と呼ぶ. 例えば, 物体 A の質量の測定を考えてみよう. この測定に係わっているものを全て挙げると, 測定される対象である物体 A, バネばかりなどの測定器, およびバネばかりの目盛りを読む測定者となる. 本稿で

は物体 A などのように測定される対象のことを 状態 と呼ぶ. そして, バネばかり等のように, 状態に依存して (この場合は物体 A の質量に依存して) 測定値を返す機械のことを 測定器 と呼ぶ.

一般に科学では再現性が要請されている. この意味を広く解釈すると, 必ずしも同一の実験に対して同じ測定値が得られることを要請しているわけではない. 測定値の統計的分布にのみ再現性を要請している. その統計的分布は先に述べた状態と測定器に依存して決まる. 先ほどの質量の測定の場合も, 必ず何らかの誤差が入ることを考えると, 同一の測定に対して全く同じ測定値が得られるとは限らない. しかし, その物体 A の質量の値とバネばかりの種類 (例えば目盛の幅が $0.1\ \mathrm{g}$ のものを用いるか, $1\ \mathrm{g}$ のものを用いるかなど) さえ分っていれば, 統計的分布に関してはほぼ予測がつく. 量子力学も例外ではなく,1 回の測定の測定値を予言することは不可能ではあるが, 状態と測定の方法を指定すると, その測定値の統計的分布は近似的に予言できる.

次に, 物体 A の質量 m が未知であり, バネばかりを用いた質量 m の推定を考えてみよう. まず容易に分ることとして, 測定値の統計的分布は未知の質量 m (未知のパラメータ) を反映する. 従って, この原理を逆に利用すると, 複数得られた測定値から逆に未知の質量 m を推定することができる. 一般に, 測定値の統計的分布は状態に埋め込まれたパラメータを反映する. このことを利用して, 複数の測定値から逆に未知パラメータを推測することができる. この推定方法を厳密に定式化したものが統計学である.

統計学では確率分布族のパラメータ推定がよく議論される. この場合データを抽出する手段である測定器があらかじめ 1 つ指定されている場合を扱っていることに注意されたい. なお統計学では確率分布族のことをモデルと呼ぶが, 本稿では上記の事情から確率分布族のパラメータ推定を 単一測定モデル と呼ぶことにする[2]. このようなモデルでは測定値から推定値を与える関数の構成のみ統計家に委ねられている.

一方, データを抽出する手段である測定器が複数考えられる場合もある. この場合, 得られたデータから適応的に測定器を選択していくことができるわけである. 先の例では, 得られた値から次に用いるバネばかりの目盛り幅をきめることが出来る[3]. 本稿ではこのように測定器の適応的な選択まで統計家に委ねられているモデルを 適応的な測定選択可能モデル と呼ぶことにする[4]. 本稿の主な目的の 1 つは量子系をそのようなモデルとして扱うことにある. しかし, 量子力学に従わない系でも適応的な測定選択可能モデルは存在し, 先ほどの質量の測定以外の例として 3 次元空間内の棒の長さをカメラを通して推定する問題や反応容量曲線の推定などがあげられる. 前者の場合はカメラの撮影アングルの選択が測定選択に対応し, 後者の場合は横軸のどの値のときの実験を行うかが, 測定選択に対応する.

また, このような考え方は統計調査でも重要な役割を果たすと考えられる. アンケートによる統計調査では, 測定の選択はアンケートの質問の選択に対応する. しかも, その質問の内容によって正しく答えてくれる確率や回収率が変化する. 例えば,「あなたは今までに離婚したことがありますか.」という質問を入れると何パーセントかの割合で, 偽った回答をする人がいることが知られている. また, 正確な情報を得ようとして, くどい質問を並べ過ぎると回収率が低下

[2]確率分布族に関する統計的議論を量子系と対比して「古典的」と形容する論文が有る. 古典力学に従う系であっても適応的な測定選択可能モデルが存在するため本稿ではそのような表現は控える.

[3]この例では目盛り幅が小さいほど測定可能な上限値が小さいため, 目盛り幅の小さいバネばかりをいつも用いればよいわけではない. 物体の質量に応じた目盛り幅を選択する必要がある.

[4]林, 松本 [27] ではこのようなモデルのことを測定自由度をもつ統計モデルと呼んでいるが本稿では適応的な測定選択を強調するため上記のような名称を採用した.

したり, いい加減に回答する人が増えたりする. このような事情を考慮すると, 先の意味での測定選択が重要な意味を持ってくる. さらに, 複数回にわたってアンケート調査を行う場合, 前回の調査から得られたデータをもとに, 質問内容を変更することも可能となることも考えられる. このようなことも可能となると, 先ほど述べた適応的な測定選択可能モデルとして扱うことができる.

このように適応的な測定選択可能モデルは幅広い重要性を持っている. ここで述べた内容はいわゆる適応的な実験計画であり, 既に相当の蓄積があると思われる. しかし著者の知る限りこの内容を扱った文献は林, 松本 [27] 松本 [28] 以外知らない. おそらく何らかの研究があると思われる. なお, 林, 松本 [27] において平均 2 乗誤差に注目して詳しく議論されている.

1.2 量子力学での適応的な測定選択可能モデルの必要性

ここで統計的視点から見た古典力学と量子力学の相違について触れておく. 量子力学以前の古典力学の根底にはいわゆるラプラス的な決定論があった. そのような決定論には少なくとも状態をいくらでも正確に測定できるという考えが含まれていた.

ここで 3 次元空間内の棒の長さをカメラを通して推定する問題について考える. この場合推定方法としてカメラを用いるという制約が有るが, これはあくまでも技術的な事情によるものである. 従って, 超音波探知機などのように, 一度に特定のアングルからのカメラの映像より多くの情報を抽出する測定器を用いると, より正確な推定が可能となる. ここで超音波探知機はどのアングルからのカメラよりもより緻密な情報をもたらすことに注意してもらいたい[5]. 従って超音波探知機まで選択肢に含まれていると, 常に超音波探知機を用いて測定すればよい. このような場合は, 先に述べた単一測定モデルとして扱うことができる. このように古典力学に従う系での適応的な測定選択可能モデルでは, 測定器選択の必要性はあくまでも技術的な問題である.

しかし, 量子力学では一般に位置と運動量は同時に測定できないと言われている. 統計的に正確な表現を用いると, 「 位置の測定 」から得られる情報と「 運動量の測定 」から得られる情報を同時に含む測定器は存在しない, と言い直すことができる. 量子力学に従って状態記述を行う限り, そのような測定器の存在が否定される (§4.4). 従って, 量子系ではパラメータ推定を適応的な測定選択可能モデルとして定式化することは技術的な問題ではなく原理的な問題である.

1.3 量子相関を用いた推定方法

先にも述べたように量子系でなくても適応的な測定選択可能モデルとして扱うべきモデルは数多く有る. このような適応的な測定選択可能モデルと量子系が異なる点が, もうひとつある. 量子系では複数の状態が準備されたときに, 複数の状態にまたがる測定が構成できる. すなわち, 複数のサンプルからなる合成系に対して一括して測定を行うことも可能である. 本稿では, このような測定を 量子相関を用いた測定 と呼ぶ. この種の測定は個々のサンプルに対する測定に分割できないので, 適応的な測定選択可能モデルでは扱うことが出来ない. 量子系を量子相関を用いた測定も許したモデルとして扱うとき, 量子相関を許すモデル と呼び, それを許さない

[5] 測定器の優劣に関する正確な定式化は §3.4 でなされる.

モデルとして扱うときは量子相関を許さないモデルと呼ぶことにする. その上で両者を大偏差型評価を用いて比較する. 本稿の後半部分ではこの問題を扱う.

1.4 概略

以下, 概略を述べる. まず §2 では, 単一測定モデルで既に知られている大偏差型評価に関する定理をまとめておく. 続いて, §3 では適応的な測定選択可能モデルを扱う. §3.1 から §3.3 ではその正確な定義を与え, §3.4 では先ほど述べた測定の優越性や両立性などの定義を与えた上で議論を行う. そして §3.5 では §2 に対応する形で大偏差型評価に関する議論を行う.

次に §4 では量子系を適応的な測定選択可能モデルとして定式化し, 量子系での測定器の両立性, 及び大偏差型の評価を行う. 従来の量子系での推定に関する研究は主に平均 2 乗誤差の観点から行われてきた [4, 6, 7, 10, 14, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 30]. 大偏差型の評価に注目して量子系での推定問題に取り組んだ文献はわずかに [15, 17, 20, 26, 31] のみである.

そして §5 では量子相関を許すモデルを扱う. まず §5.1 では量子相関を許す測定を含めるために, 量子系の事情を考慮した定式化を行う. そしてこの比較を扱うために重要な定理を §5.2 で証明する. さらに,§5.3 では §3.5 に対応する形で大偏差型の評価を行う.

この問題の厳密な比較は容易ではなく, 十分な一般論は完成していない. 従って §6 では, この比較について本稿ではこれまで量子推定理論でよく扱われてきた [4, 6, 7, 10] コヒーレント光の複素振幅の推定問題を, 背景熱ノイズがある場合とない場合双方について扱う. §6.1 と §6.2 ではこの問題を扱うための若干の準備を行う. そして §6.3 でこの問題では両者にはっきりとした差が生じることを確認する. とくにここではこの問題を局所的な大偏差型評価と大域的な大偏差型評価に別けた議論も同時に行う. このモデルでは局所的な定式化と大域的な定式化との間にもはっきりした差が生じる. このような差は (ある種の正則性を満たす) 単一測定モデルでは生じない. なお, 平均 2 乗誤差を用いたこの種の比較を扱った文献として [25, 26, 27, 29, 31] がある. 続いて §6.5 ではコヒーレント光の複素振幅の推定問題をミニマックス法の視点から取り扱う. ここでは危険関数が真のパラメータと推定値との距離の単調増加関数で与えられるときに一般的に §6.2.2 で定義されるヘテロダイン測定がミニマックス法の意味で最適になることを示す. なおこの問題をベイズ法で扱った文献として Holevo[6] がある.

2 単一測定モデル

最初に単一測定モデルで大偏差型評価に関して良く知られている結果を要約する. 先にも述べたように単一測定系では確率分布族 $\{p_\theta|\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d\}$ のパラメータ θ を推定する問題を扱う. このとき以下に定義する Kullback-Leibler の情報量 $D(p\|q)$ が重要な役割を果たす [2].

$$D(p\|q) := \int_\Omega \log\left(\frac{p}{q}(\omega)\right) p(\,d\omega).$$

なお $\frac{p}{q}(\omega)$ は Radon-Nikodym の微分である. そして, 未知パラメータが一つの場合には以下に定義する Fisher 情報量 $J(\theta)$ も重要な役割を果たす.

$$J(\theta') := \int_\Omega \left(\frac{d}{d\theta} \log p_\theta(\omega) \Big|_{\theta=\theta'} \right)^2 p_{\theta'}(\, d\omega). \tag{1}$$

なお, Fisher 情報量と先に定義した Kullback-Leibler の情報量との間には次のような関係が知られている.

$$J(\theta) = 2 \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^2} D(p_{\theta+\epsilon} \| p_\theta).$$

Fisher 情報量を未知パラメータが複数の場合に拡張したものが次に定義する Fisher 情報行列 $J_{i,j}(\theta)$ である.

$$J_{i,j}(\theta') := \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial \theta^i} \log p_\theta(\omega) \Big|_{\theta=\theta'} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta^j} \log p_\theta(\omega) \Big|_{\theta=\theta'} \right) p_{\theta'}(\, d\omega).$$

ここでは, これらの量が大偏差型評価に関してどのような役割を果たすか要約する.

まず n 個のデータが得られた場合の推定量は n 個のデータから未知パラメータの推定値を与える関数 $T^{(n)}$ で定義される. 一般的に推定量の系列 $\{T^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ に次に定義する一致性が課せられる. 推定量の系列 $\{T^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ が次の条件を満たすとき 一致推定量 であるという.

$$\lim_{n\to\infty} p_\theta^n \left(\left\| T^{(n)} - \theta \right\| > \epsilon \right) = 0, \quad \forall \theta \in \Theta, \forall \epsilon > 0.$$

たいていの場合上記の一致性を満たす推定量の系列は数多く有りこれらの中でその優劣をつける必要がある[6]. その良し悪しをつける基準として用いられるのが平均 2 乗誤差であったり, 大偏差型の評価であったりする. 未知パラメータが複数ある場合の大偏差型の評価式はやや複雑であるためまず最初に未知パラメータが 1 つの場合について考える. 長岡 [14],Bucklew[12] によると以下の等式が成立することが知られている.

定理 **1** $\mathcal{C}$ を一致推定量の集合とすると次の式が成立する.

$$\min_{\{T^{(n)}\} \in \mathcal{C}} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log p_\theta^{(n)} \left(T^{(n)} \geq \theta + \epsilon \right) = -D(p_{\theta+\epsilon} \| p_\theta) \tag{2}$$

$$\min_{\{T^{(n)}\} \in \mathcal{C}} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log p_\theta^{(n)} \left(T^{(n)} \leq \theta - \epsilon \right) = -D(p_{\theta-\epsilon} \| p_\theta). \tag{3}$$

したがって次の式が成立する.

$$\inf_{\{T^{(n)}\} \in \mathcal{C}} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log p_\theta^{(n)} \left(\left| T^{(n)} - \theta \right| > \epsilon \right) \geq -\min \left\{ D(p_{\theta+\epsilon} \| p_\theta), D(p_{\theta-\epsilon} \| p_\theta) \right\}. \tag{4}$$

(4) で一般に等号は成立しない. さらに, 適当な正則性の下で次の式も成立する.

$$\min_{\{T^{(n)}\} \in \mathcal{C}} \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\epsilon^2} \log p_\theta^{(n)} \left(\left| T^{(n)} - \theta \right| > \epsilon \right) = -\frac{1}{2} J_\theta. \tag{5}$$

そして左辺の min は一致推定量として最尤推定量を用いると達成される.

[6] 上記の意味で一致性を満たす推定量の存在条件に関する問題は竹内 [5] において詳しく議論されている.

この問題を未知パラメータが複数の場合に拡張する話題はあまり扱われないが, 容易なので紹介しておく.

定理 2 $\mathcal{C}$ を一致推定量の集合とすると次の不等式が成立する.

$$\inf_{\{T^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\epsilon^2}\log p_\theta^{(n)}\left(\left\|T^{(n)}-\theta\right\| > \epsilon\right) \geq -\inf_{\theta'\in\Theta}\left\{D(p_{\theta'}\|p_\theta)\,\middle|\, \|\theta'-\theta\| < \epsilon\right\}. \tag{6}$$

そして, *(5)* の一般化として適当な正則条件の下で次の式が成り立つ.

$$\min_{\{T^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}} \liminf_{\epsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\epsilon^2}\log p_\theta^{(n)}\left(\left\|T^{(n)}-\theta\right\| > \epsilon\right) = -\min_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{i,j}(\theta)\xi^i\xi^j \,\middle|\, \|\xi\|=1\right\}. \tag{7}$$

(4) の場合と同様にして左辺の min は一致推定量として最尤推定量を用いると達成される.

3 適応的な測定選択可能モデル

この節では適応的な測定選択可能モデルの数学的な定式化を試み, その上で先ほどの大偏差型評価に関する議論がどのように書き換えられるか考える.

3.1 適応的な測定選択可能モデルの定式化

適応的な測定選択可能モデルでの推定問題では §1 でも述べたように被測定系の 状態 ρ と 測定装置 M に依存して 確率分布 P_ρ^M が決まる. 従って, 測定集合と状態族の組 $(\mathcal{M},\mathcal{S})$ が与えられると適応的な測定選択可能モデルが与えられることになる. 測定者が未知状態を推定するために自由に選べる測定 M の集合を 測定集合 とよび $\mathcal{M}:=\{M\}$ と表すことにする. なお, 測定集合 $\mathcal{M}$ は, 後に §3.3 で定義する 複合測定 を含むようにあらかじめ拡大しておく.

今後, 測定 $M\in\mathcal{M}$ の測定値のなす集合を Ω_M と書き対応する σ-field を $\mathcal{F}(\Omega_M)$ と書くことにする. なお, 今後簡単のため $P_{\rho_\theta}^M$ を P_θ^M と省略し Kullback-Leiber の情報量 $D(P_{\theta'}^M\|P_\theta^M)$ を $D^M(\theta'\|\theta)$ または $D^M(\rho_{\theta'}\|\rho_\theta)$ と省略することにする. また確率分布族 $\{P_\theta^M|\theta\in\Theta\}$ の $\theta\in\Theta$ での Fisher 情報行列を J_θ^M と書く.

自明なことであるが測定集合 $\mathcal{M}$ が一つの元からなる場合が先に述べた単一測定モデルになり, 適応的に測定選択可能モデルは従来の意味でのモデル (確率分布族) の一般化になっている.

3.2 量子力学的でない例

ある二次元空間中にある片側が固定された長さ 1 の棒の角度 θ をカメラの映像を通して推定する問題を考える. 測定の際には分散 σ^2 のガウス型の誤差が入る仮定する. 状態族は

$$\mathcal{S}:=\{\rho_\theta\,|\theta\in[0,2\pi)\}$$

と書ける. ある方向 $\phi \in [0, 2\pi)$ から粒子を撮影する，という測定を M_ϕ と書くと，M_ϕ の測定値の集合は $\{(x\cos\phi, x\sin\phi)|x \in \mathbb{R}\}$ である．従って, 確率分布の密度関数 $p_\theta^{M_\phi}(x)$ は以下で与えられる.

$$p_\theta^{M_\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \cos(\theta - \phi))^2}{2\sigma^2}\right).$$

今後このモデルを $\mathcal{A}$ で表すことにする.

3.3 複合測定

§3.2 で挙げた例 $\mathcal{A}$ で，測定としてある特定のアングルからの撮影を考えた．しかし，測定のスキームとしては撮影のアングルを乱数で決定することも考えられる．一般には，測定集合のある部分集合 $\mathcal{M}'$ の元を $\mathcal{M}'$ の確率測度 μ で重ね合わせたものを考えることができる．そのような測定のことを 複合測定 という．$\mathcal{A}$ の測定集合 $\mathcal{M}$ は，$\{M_\phi\}_{\phi\in[0,2\pi)}$ およびそれらをある確率測度でかさねあわせた複合測定全体からなる．先に先行して述べたように，一般に我々の枠組では，測定集合といえば複合測定も含むように拡大しておくことにする．

複合測定の測定値の集合については注意が必要である .たとえば ,二つのアングル ϕ_1, ϕ_2 を確率的に選んで測定する場合 ,その測定値のなす集合は $\{(x\cos\phi_1, x\sin\phi_1)|x \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(x\cos\phi_2, x\sin\phi_2)|x \in \mathbb{R}\}$ である．ここで撮影のアングルがちがう像は別のものとして区別されていることに注意してほしい. つまり， $\mathcal{M}'$ の元を確率測度 μ で重ね合わせた複合測定の測定値の集合は $\Omega := \coprod_{M\in\mathcal{M}'} \Omega_M$ となる (Ω_M は測定 M の測定値集合).

測定 M_1, M_2 を確率 $\lambda, 1-\lambda$ で混合した複合測定を M_λ とかくと，Fisher 情報行列について凸結合則

$$J_\theta^{M_\lambda} = \lambda J_\theta^{M_1} + (1-\lambda) J_\theta^{M_2}, \tag{8}$$

が成り立つ．同様に, Kullback-Leibler の情報量についても同様の凸結合則

$$D^{M_\lambda}(\theta'\|\theta) = \lambda D^{M_1}(\theta'\|\theta) + (1-\lambda) D^{M_2}(\theta'\|\theta) \tag{9}$$

が成り立つ．

3.4 測定の優越性, 両立性及び部分測定集合の十分性

2 つの測定 $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ に対して測定値集合 Ω から Ω への写像 f が存在して以下の条件を満たすと仮定する.

$$P_\theta^{M_1} = P_\theta^{M_2} \circ f^{-1}, \quad \forall\theta \in \Theta. \tag{10}$$

(10) は測定 M_2 から得られたデータから写像 f をほどよすことによって, 測定 M_1 を行ったときに得られる確率分布が構成できることを示している. 従って, 測定 M_2 は測定 M_1 に含まれ

ている情報を全て含んでいると見なすことができる. このようなことから,(10) を満たすとき測定 M_2 は測定 M_1 に対して 優越 するもしくは 優れている と呼び, $M_2 \geq M_1$ と書くことにする. このとき, Kullback-Leibler の情報量及び Fisher 情報行列の単調性より以下の式が導ける.

$$D^{M_2}(\theta'\|\theta) \geq D^{M_1}(\theta'\|\theta), \quad \left[J^{M_2}_{i,j}(\theta)\right] \geq \left[J^{M_1}_{i,j}(\theta)\right].$$

さらに, 異なる 2 つの測定に対して測定 $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ に対して両者に同時に優越する測定 $M_3 \in \mathcal{M}$ が存在するとき, 測定 M_1 と M_2 は 両立 すると呼ぶことにする.

そして, 任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して $M' \geq M$ となる $M' \in \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ が存在するとき部分測定集合 $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ は 十分 であるいう.

§4.4.2 で詳しく調べることになるが, 量子系では量子系の持つ凸結合則によりある条件を満たす 2 つの測定に対して両立する測定の存在が否定される.

3.5 推定量と大偏差型評価

単一測定モデルにおいては n 個のサンプルが準備された系ではそのサンプルから得られた n 個のデータから推定値を与える関数 $T^{(n)}$ が推定量と呼ばれ, 一致性や大偏差型評価は推定量の列 $\{T^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ に対して議論された. 測定自由度をもつ統計モデルにおいては既に得られたデータをもとに逐次測定を改良することを許した上で未知パラメータを推定する問題を扱う. すなわち, k 個目のサンプルに対する測定の選択に際しては, $k-1$ 個目までのサンプルを測定して得られた $k-1$ 個のデータ $(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})$ から測定 $M_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})$ を決定するものとする.

従って数学的には, n 個のサンプルが準備された系では 推定量 は逐次的に構成される測定の系列 $\mathcal{E}^{(n)} := \{M_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\}_{k=1}^{n}$ と n 個のデータから推定値を与える関数 $T^{(n)}$ の組 $(\mathcal{E}^{(n)}, T^{(n)})$ で定義される. さらに, 未知状態 ρ_θ の n 個のサンプルに対して測定の系列 $\mathcal{E}^{(n)}$ で測定するとすると, 以下に定義する Ω^n 上の確率分布 $P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}$ が得られる.

$$P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}(B_1 \times \cdots \times B_n) := \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} P_\theta^{M_n(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})}(\,d\omega_n) \cdots P_\theta^{M_1}(\,d\omega_1).$$

n 個のサンプルに対して同一の測定 M を施す測定の系列を $M \times n$ で表すことにする. Kullback-Leibler の情報量 $D(P_{\theta'}^{\mathcal{E}^{(n)}} \| P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}})$ を $D^{\mathcal{E}^{(n)}}(\theta'\|\theta)$ で表す. このとき次の式が成立する.

$$D^{\mathcal{E}^{(n)}}(\theta'\|\theta) = nD^{\mathcal{E}_{\theta'}^{(n)}}(\theta'\|\theta). \tag{11}$$

なおここで以下の確率分布で行う複合測定を $\mathcal{E}_\theta^{(n)}$ で表した.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_\theta^{\mathcal{E}^{(k-1)}} \circ M_k^{-1}.$$

そして, 推定量の系列 $\{(\mathcal{E}^{(n)}, T^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ が次の式を満たす場合,一致推定量 と呼ぶ.

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{\left\|T^{(n)} - \theta\right\| \geq \epsilon\right\}\right) = 0, \quad \forall\theta \in \Theta, \forall\epsilon > 0.$$

以下では, 一致推定量の集合を $\mathcal{C}$ で表す. そして上記の一致性の下で大偏差型の評価を行う. 未知パラメータが複数の場合の議論は困難があるのでまず始めに未知パラメータが 1 つの場合について扱う.

定理 3 正則性条件

$$\lim_{\theta''\to\theta'}\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta''\|\theta) = \sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta'\|\theta) \tag{12}$$

の下で十分小さい $\epsilon > 0$ に対して式が成立する.

$$\min_{\{(\mathcal{E}^{(n)},T^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}} \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{T^{(n)}\geq\theta+\epsilon\right\}\right) = -\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta+\epsilon\|\theta) \tag{13}$$

$$\min_{\{(\mathcal{E}^{(n)},T^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}} \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{T^{(n)}\leq\theta-\epsilon\right\}\right) = -\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta-\epsilon\|\theta) \tag{14}$$

従って次の式が得られる.

$$\begin{aligned}&\inf_{\{(\mathcal{E}^{(n)},T^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}} \frac{1}{n}\log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{\left|T^{(n)}-\theta\right|\geq\epsilon\right\}\right)\\ \geq\ & -\min\left\{\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta+\epsilon\|\theta),\ \sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta-\epsilon\|\theta)\right\}.\end{aligned} \tag{15}$$

さらに正則性条件

$$\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon^2}\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta+\epsilon\|\theta) = \sup_{M\in\mathcal{M}}\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon^2}D^M(\theta+\epsilon\|\theta) = \frac{1}{2}\sup_{M\in\mathcal{M}} J^M(\theta) \tag{16}$$

が成り立つならば次の式も成立する.

$$\min_{\{(\mathcal{E}^{(n)},T^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}} \liminf_{\epsilon\downarrow0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\epsilon^2 n}\log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{\left|T^{(n)}-\theta\right|\geq\epsilon\right\}\right) = -\frac{1}{2}\sup_{M\in\mathcal{M}} J^M(\theta). \tag{17}$$

なお inf を達成する一致推定量の列は θ に依存せずに構成できる. 詳しい構成法については松本 [28] を見よ.

証明 (13) における「(左辺) $\geq$ (右辺)」を示す. まず最初に任意の $\epsilon > 0$ 及び $\theta' > \theta+\epsilon$ に対して

$$p_n := p_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{T^{(n)}\geq\theta+\epsilon\right\}\right), q_n := p_{\theta'}^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{T^{(n)}\geq\theta+\epsilon\right\}\right)$$

とおく. 一致性より次の式が成立する.

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} q_n = 1.$$

Kullback-Leibler の単調性より,

$$D^{\mathcal{E}^{(n)}}(\theta'\|\theta) \geq q_n\log\frac{q_n}{p_n} + (1-q_n)\log\frac{1-q_n}{1-p_n} = -q_n\log p_n - (1-q_n)\log(1-p_n) - h(q_n)$$

を得る. ここで $h(x) := -x\log x - (1-x)\log(1-x)$ とおいた. 故に (11) とあわせて,

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log p_n \geq -\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}D^{\mathcal{E}^{(n)}}(\theta'\|\theta) = -\limsup_{n\to\infty} D^{\mathcal{E}_{\theta'}^{(n)}}(\theta'\|\theta) \geq -\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta'\|\theta).$$

正則性条件 (12) より (13) において (左辺) $\geq$ (右辺) を得る. 次に (13) において「(左辺) $\leq$ (右辺)」を示す. そのために (右辺) を任意の $\delta > 0$ で達成する一致推定量を構成する. まず以下の条件を満たすように測定 M_δ を取る.

$$\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta+\epsilon\|\theta) - D^{M_\delta}(\theta+\epsilon\|\theta) < \delta.$$

(2) より適当な推定関数 $T^{(n)}_{\theta,\delta}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log p_\theta^{M_\delta\times n}\left(T^{(n)}\geq\theta+\epsilon\right) = -D^{M_\delta}(\theta+\epsilon\|\theta).$$

従って

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log p_\theta^{M_\delta\times n}\left(T^{(n)}\geq\theta+\epsilon\right) = -\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta+\epsilon\|\theta).$$

よって (13) を得た. 同様にして (14) を得る.

次に (17) において「(左辺) $\geq$ (右辺)」を示す. (13)(14) より,

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{\left|T^{(n)}-\theta\right|\geq\epsilon\right\}\right) \geq -\min\left\{\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta+\epsilon\|\theta),\ \sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta-\epsilon\|\theta)\right\}.$$

ここで両辺について $\liminf_{\epsilon\downarrow 0}$ を取ると (16) より,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\epsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\epsilon^2 n}\log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{\left|T^{(n)}-\theta\right|\geq\epsilon\right\}\right)\\
\geq\ & -\liminf_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon^2}\min\left\{\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta+\epsilon\|\theta),\ \sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta-\epsilon\|\theta)\right\}\\
=\ & -\min\left\{\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon^2}\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta+\epsilon\|\theta), \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon^2}\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta-\epsilon\|\theta)\right\} = -\frac{1}{2}\sup_{M\in\mathcal{M}} J^M(\theta).
\end{aligned}$$

よって (左辺) $\geq$ (右辺) が示せた. さらに (13) の証明を $T^{(n)}_{\theta,\delta}$ の部分を最尤推定量にすることにより (17) が示せる. なお, ここで構成した推定量は θ の取り方に依存することに注意せよ. しかし, 先にも述べたように (17) の min を達成する一致推定量を θ に依存せずに構成するための議論は松本 [28] でなされている. □

次に先ほど証明した定理が未知パラメータが複数あるときに, どのように書き換えられるか考える.

定理 4 次の式が成立する.

$$\begin{aligned}
&\inf_{\{(\mathcal{E}^{(n)},T^{(n)})\}_{n=1}^\infty\in\mathcal{C}}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{\left\|T^{(n)}-\theta\right\|\geq\epsilon\right\}\right)\\
\geq\ & -\inf\left\{\sup_{M\in\mathcal{M}} D^M(\theta'\|\theta)\,\middle|\,\|\theta'-\theta\|>\epsilon\right\}.
\end{aligned}\tag{18}$$

さらに正則条件

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon^2}\sup_{M\in\mathcal{M}}\inf_{\theta'\in\Theta}\left\{D^M(\theta'\|\theta)\middle|\,\|\theta'-\theta\|>\epsilon\right\} = \sup_{M\in\mathcal{M}}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^2}\inf_{\theta'\in\Theta}\left\{D^M(\theta'\|\theta)\middle|\,\|\theta'-\theta\|>\epsilon\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\sup_{M\in\mathcal{M}}\inf_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\sum_{i,j}J^M_{i,j}(\theta)\xi^i\xi^j\middle|\,\|\xi\|=1\right\} \quad (19)$$

が成り立つならば次の式も成立する.

$$-\frac{1}{2}\sup_{M\in\mathcal{M}}\inf_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\sum_{i,j}J^M_{i,j}(\theta)\xi^i\xi^j\middle|\,\|\xi\|=1\right\}$$
$$\geq \inf_{\{(\mathcal{E}^{(n)},T^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\epsilon^2 n}\log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{\left\|T^{(n)}-\theta\right\|\geq\epsilon\right\}\right)$$
$$\geq -\frac{1}{2}\inf_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\sup_{M\in\mathcal{M}}\sum_{i,j}J^M_{i,j}(\theta)\xi^i\xi^j\middle|\,\|\xi\|=1\right\}. \quad (20)$$

現在のところ (20) の 1 つ目の不等号が等号に書き変えられると予想されているが十分な証明はなされていない. 松本 [28] ではその証明がなされたとの報告があるが, 後で本人が認めているようにギャップがある.

証明　(18) の証明は (13) の証明と同様にするとよい. また (20) の証明も (17) の証明と同様にするとよい. □

3.6　例への適用

§3.2 で導入した例 $\mathcal{A}$ について, (17) の右辺を求める. まず簡単な計算により $J^{M_\phi}(\theta) = \left(\frac{\sin(\theta-\phi)}{\sigma}\right)^2$ となることが分る. したがって $\sup_{M\in\mathcal{M}}J^{M_\phi}(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$ となる. よってこの場合 $\lim_{\epsilon\downarrow 0}$ での大偏差型の下限は $-\frac{1}{2\sigma^2}$ で与えられる.

4　量子系

4.1　量子系の状態と測定の定式化

次に量子系を数学的に定式化する. 量子力学では，状態はある複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の self-adjoint 非負定値作用素でトレースが 1 のもので表される. どのようなヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ をとるかは対象となる系によって異なり，量子系の表現空間という．表現空間が $\mathcal{H}$ となる量子系の状態の集合を $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で表すことにする. そしてパラメトライズされた $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\mathcal{S} := \{\rho_\theta|\theta\in\Theta\}$ を状態族と呼ぶ.

量子力学では状態をノルム 1 の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の元 $|f\rangle$ で表す流儀があるが, それは $|f\rangle$ で張られる一次元部分空間への射影 $|f\rangle\langle f|$ [7] を考えることにより, $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ の元を表しているとみな

[7]量子力学では $\mathcal{H}$ の元 $|f\rangle$ を Hilbert 空間の内積を用いて自然に $\mathcal{H}$ の双対空間の元と見なしたものを $\langle f|$ で表す. そして $\mathcal{H}$ 上の線形写像 $|f\rangle\otimes\langle f|$ を $|f\rangle\langle f|$ で表す.

せる. なお, ノルム 1 の Hilbert 空間の元で状態を表す流儀では $|f\rangle$ と $e^{i\phi}|f\rangle$ を同一視しているので, ここで述べている対応関係には問題ない. 状態集合 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ は作用素としての凸結合を考えると, 凸集合になっている. このような Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の 1 次元部分空間への射影で表される状態はこの凸結合に関する状態集合 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ の端点[8] になっており, 純粋状態と呼ぶことにする.

量子力学では測定 M に対して以下の凸結合則を要請する. なお M の測定値集合を Ω で表し, Ω は可分かつ完備 (すなわちポーランド空間) であるとする. そして可測集合族は Borel 集合族 $\mathcal{B}(\Omega)$ を考えることにする.

$$P^M_{\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2}(B) = \lambda P^M_{\rho_1}(B) + (1-\lambda)P^M_{\rho_2}(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega), \forall \lambda \in [0,1], \forall \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \quad (21)$$

ここで測定値集合を Ω にもつ測定 M がどのような性質を持つか調べることにする. まず self-adjoint な trace class 作用素からなる Banach 空間を $\mathcal{T}_{sa}(\mathcal{H})$, self-adjoint な 有界作用素からなる Banach 空間を $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ とおくことにする. そして任意の $\sigma \in \mathcal{T}_{sa}(\mathcal{H})$ に対して $P^M_\sigma(B)$ を次のように定義する.

$$P^M_\sigma(B) := \operatorname{tr}\sigma^+ P^M_{\frac{\sigma^+}{\operatorname{tr}\sigma^+}}(B) - \operatorname{tr}\sigma^- P^M_{\frac{\sigma^-}{\operatorname{tr}\sigma^-}}(B). \quad (22)$$

なお σ^+ は σ の固有値が正の部分を表し, σ^- は固有値が負の部分を表すもとのとする. ($\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$). すると写像 $\sigma \mapsto P^M_\sigma(B)$ は trace ノルムに関して有界線形写像となる. trace ノルムに関する $\mathcal{T}_{sa}(\mathcal{H})$ の双対空間が $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ になることから, $P^M_\rho(B) = \operatorname{tr} M(B)\rho, \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ となる $M(B) \in \mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ が取れる. しかも各 $M(B)$ は P^M_ρ が確率測度になることから, 次の条件を満たす[9].

- $\forall B \in \mathcal{B}(\Omega) \quad M(B) = M(B)^\dagger \geq 0$ (self-adjoint 非負定値) ,
- $M(\emptyset) = 0,\ M(\Omega) = \mathrm{Id}$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j)$ を満たす加算個の集合列 $\{B_j\} \subset \mathcal{B}(\Omega)$ に対し $\displaystyle\sum_j M(B_j) = M\left(\bigcup_j B_j\right)$.

そこで上記の条件を満たす $\mathcal{B}(\Omega)$ から $\mathcal{B}_{sa}(\mathcal{H})$ への写像の集合をその全体を $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ で表すことにする. 従って, 表現空間が $\mathcal{H}$ であり測定値集合が Ω である量子系の測定は $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ の元で表すことが出来る.

現在の技術では現実の量子系で任意の $M \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ に対応する測定器を実現することは困難であるが, 将来にわたってその実現可能性が否定されているわけではない. 従って本稿では, 量子系を扱う際, 測定集合を可能な限り広く取ることにし, $\bigcup_\Omega \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ を測定集合 $\mathcal{M}$ として扱うことにする. ここで $\bigcup_\Omega$ は任意のポーランド空間に関して和を取ることとする. このように測定集合をとっておくと，複数の測定を確率的に重ね合わせた複合測定も自然に測定集合に含まれる．

各 $M(B)$ が全て射影になる測定 M を 射影性 を満たすといい, 射影測定 と呼ぶ. 射影測定の集合を $\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ であらわすことにする. なお表現空間 $\mathcal{H}$ の次元が有限で k である

[8] 凸集合の元で他の異なる 2 つの元の凸結合で表せないものを端点と呼ぶ.
[9] 作用素 X の adjoint 作用素を $X^\dagger$ で表すことにする.

ときには, 測定値集合は $\{1, \ldots, k\}$ であるとしても一般性を失わない. 射影測定の例として self-adjoint 作用素 A のスペクトル分解が挙げられる. この射影測定を E_A で表すことにする. 量子系ではこの射影測定が重要な役割を果たす. そして一般の必ずしも射影性を満たさない測定 $M \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ が以下に示す意味において射影測定によって表せることが知られている.

定理 5 (Naĭmark の拡張定理) 任意の測定 $M \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ に対して, 以下の条件を満たす $\mathcal{H}$ を含む *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}'$ と $\mathcal{H}'$ 上の射影測定 $E \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H}')$ が存在する.

$$PE(B)P = M(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega).$$

ただし, P は $\mathcal{H}'$ から $\mathcal{H}$ への射影を表す.

今後上記の条件を満たす $(\mathcal{H}', P, E)$ の組を M の Naĭmark 拡張と呼ぶことにする. 証明は [1, 19] を参照のこと.

4.2 SLD Fisher 情報行列, 梅垣エントロピー

次に量子系での推定問題で重要な役割を果たす状態族 $\mathcal{S}$ の SLD Fisher 情報行列 $J^{\mathcal{S}}_{i,j}(\theta)$ を定義する [7, 10, 21, 30]. まず 対称対数微分 (SLD) $L_{\theta,i}$ を以下の式を満たすように定義する.

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta^i} = \frac{1}{2}\left(\rho_\theta L_{\theta,i} + L_{\theta,i}\rho_\theta\right).$$

ρ_θ が退化していないときは SLD $L_{\theta,i}$ は一意に存在する. この SLD から Fisher 情報行列すなわち, 対称対数微分 (SLD) Fisher 情報行列 $J^{\mathcal{S}}_{i,j}(\theta)$ が次のように定義される.

$$J^{\mathcal{S}}_{i,j}(\theta) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(L_{\theta,i}\rho L_{j,\theta} + L_{j,\theta}\rho L_{\theta,i}).$$

なお ρ_θ が退化しているときは SLD L_θ の取り方に自由度はあるものの, $J^{\mathcal{S}}_{i,j}(\theta)$ については一意に定まる. なお未知パラメータが 1 つのときは SLD Fisher 情報量とよび $J^{\mathcal{S}}(\theta)$ と書き表す. パラメータが 1 つのときの SLD Fisher 情報量については次の式が知られている (藤原 [30]).

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} J^M(\theta) = J^{\mathcal{S}}(\theta). \tag{23}$$

そして未知パラメータ複数のときについては SLD Fisher 情報行列については次の式が示せる.

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \sum_{i,j} J^M_{i,j}(\theta)\xi^i\xi^j = \sum_{i,j} J^{\mathcal{S}}_{i,j}(\theta)\xi^i\xi^j, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{24}$$

1 パラメータ状態族 $\{\rho_{\theta+\epsilon\xi} | \epsilon \in \mathbb{R}^d\}$ について (23) を適用すると (24) は得られる.

また Kullback-Leibler の情報量の量子力学的対応物として梅垣によって導入された梅垣エントロピー

$$D(\sigma\|\rho) := \mathrm{tr}\,\sigma(\log\sigma - \log\rho)$$

がよく知られている [3]. $\mathrm{Im}\,\rho \subset \overline{\mathrm{Im}\,\sigma}$ とならないときは ∞ とする. 梅垣エントロピーに関して次の不等式が知られている.

$$D^M(\sigma\|\rho) \leq D(\sigma\|\rho). \tag{25}$$

しかも, 等号が成立する測定 $M \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H})$ が存在するための必要十分条件は $\sigma\rho = \rho\sigma$ で与えられる. (25) は Uhlmann の不等式 [8] を用いると容易に示せる. (1) に対応する SLD Fisher 情報量と梅垣エントロピーとの関係については §5.3 及び §6.3.1 を見よ.

4.3 適応的な測定選択可能モデルとしての大偏差型評価

ここで先ほど定式化した量子系が適応的な測定選択可能モデルとして扱ったとき, 大偏差型評価の下でどの程度の推定誤差になるか考える. そのためには定理 3 及び 定理 4 の式の右辺を求めるとよい. SLD Fisher 情報行列 $J^{\mathcal{S}}_{i,j}(\theta)$ が先ほど述べた意味で最大元になることから, (17)(20) の右辺の値は $J^{\mathcal{S}}_{i,j}(\theta)$ を用いて容易に表すことができる.

$$((17)\text{の右辺}) = -\frac{1}{2}J^{\mathcal{S}}(\theta), \quad ((20)\text{の右辺}) = -\frac{1}{2}\inf_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left\{\sum_{i,j} J^{\mathcal{S}}_{i,j}(\theta)\xi^i\xi^j \,\middle|\, \|\xi\| = 1\right\}.$$

一方 (13)(14)(15)(18) の右辺の値は先にも述べたように一般には (25) で等号を達成する測定 M が存在しないことから, 梅垣エントロピーを用いて表すことはできない.

4.4 量子系での十分性と両立性

以下, 量子系での十分性と両立性についての議論を行う. まず, 双方の概念を量子系で展開する際に重要となる測定の可換性を定義する.

定義 6 測定 M_1, M_2 が次の条件を満たすとき 可換 と言うことにする. Ω_1, Ω_2 をそれぞれの測定値集合とする. 任意の $B_1 \in \mathcal{B}(\Omega_1), B_2 \in \mathcal{B}(\Omega_2)$ に対して, $[M_1(B_1), M_2(B_2)] = 0$ が成立する.

なお, 測定が射影性を満たすとき, 自分自身と可換になる. しかし, その逆は一般には言えない.

4.4.1 十分性

十分性を議論するために, 測定 M と可換な測定の集合を $\mathcal{M}_M$ を定義する. そして射影性を満たす測定 E が任意の $\rho_\theta \in \mathcal{S}$ 及び $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対して条件 $[\rho, E(B)] = 0$ を満たすとき, 状態族 $\mathcal{S}$ と可換であるという.

補題 7 $\mathcal{H}$ が有限次元とする. 射影性を満たす測定 E が状態族 $\mathcal{S}$ に対して可換であるとき, 状態族 $\mathcal{S}$ に対して $\mathcal{M}_E$ は十分になる.

なお一般にはその逆は言えない.
証明　$\mathcal{H}$ の次元を k とする. すると E は $\{E^i\}_{i=1}^k$ と表すことができる. 任意の測定 M に対して測定 M_E を次のように定義すると

$$M_E(B) := \sum_{i=1}^{k} E^i M(B) E^i, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega),$$

M_E は E と可換な測定になり, 状態族 $\mathcal{S}$ に関して M_E は可換になる. □
表現空間が $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ となり状態族が $\{\rho_\theta \otimes \rho | \theta \in \Theta\}$ と表されるときには, 部分測定集合 $\bigcup_\Omega \{M \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_2} | M \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H}_1)\}$ は十分となる.

4.4.2　両立性

測定の両立性について以下の補題が証明できる.

補題 8 $\mathcal{H}$ 上の *2* つの測定 M_1, M_2 が可換であれば両立する.

これは容易に証明できる. しかし逆は一般には言えない. 代りに次の補題が言える.

補題 9 $\mathcal{H}$ 上の *2* つの射影性を満たす測定 E_1, E_2 に関して以下は同値である.

[9.1] E_1 と E_2 は可換である.

[9.2] E_1 と E_2 は両立する.

証明　まず「$[9.1] \Rightarrow [9.2]$」は補題8 より導ける. 従って「$[9.2] \Rightarrow [9.1]$」を示せばよい. E_1, E_2 に同時に優越する測定を M とする, まず最初に M が射影性を満たすと仮定する. 復元関数をそれぞれ f_1, f_2 とすると. M の自己可換性より, $B_1, B_2 \subset \mathcal{B}(\Omega)$ に対して,

$$[E_1(B_1), E_2(B_2)] = [M(f_1^{-1}(B_1)), M(f_2^{-1}(M_2))] = 0$$

となり題意が示せる. 次に M が必ずしも射影性を見たさない場合について考える. まず M の Naĭmark 拡張を $(\mathcal{H}', P, E)$ とする. すると $P(E \circ f_i^{-1})P = E_i, (i = 1, 2)$ となる. E_i の射影性より $[P, E \circ f_i^{-1}] = 0, (i = 1, 2)$. 従って, $B_1, B_2 \subset \mathcal{B}(\Omega)$ に対して,

$$[E_1(B_1), E_2(B_2)] = P[E \circ f_1^{-1}(B_1), E \circ f_2^{-1}(B_2)]P = 0$$

を得る. 従って題意が示せた. □
さらに self-adjoint 作用素のスペクトル分解で表される射影測定の可換性に関して次の補題が知られている [9].

補題 10 A, B を $\mathcal{H}$ 上の *self-adjoint* 作用素とする. 射影測定 E_A と E_B が可換であれば $[A, B] = 0$ となる. さらに A, B が有界であればその逆も成り立つ.

4.4.3　両立しない射影測定の例

ここでは量子系の例として, 1 次元空間上の粒子の系を考える. この系では表現空間は $L^2(\mathbb{R})$ で表され,「位置の測定」と呼ばれる測定は以下に定義する self-adjoint 作用素 Q のスペクトル分解 E_Q で表される. 一方「運動量の測定」と呼ばれる測定は以下に定義する self-adjoint 作用素 P のスペクトル分解 E_P で表される[10].

$$Q(f)(x) := xf(x), \quad P(f)(x) := i\hbar \frac{df}{dx}(x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

$[Q, P] = i\hbar$ となることから補題 10 より射影測定 E_P と E_Q は可換ではない. すなわち両者に同時に優越する測定は存在しない.

4.5　梅垣エントロピーの評価

ここで梅垣エントロピーに関して若干触れておく. 以下では $E := \{E^i\}_{i=1}^{\infty}$ と書ける射影測定を主に扱う. このような射影測定を加算射影測定と呼ぶことにする.

まず, 加算射影測定 E に対して以下のように条件付き期待値 $\mathcal{E}_E : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \to \mathcal{S}(\mathcal{H})$ を定義する.

$$\mathcal{E}_E : \rho \mapsto \sum_i E^i \rho E^i.$$

次の定理が成立する.

定理 11 加算射影測定 E が次の条件を満たすとする: $w(E) := \sup_i \dim E^i < \infty$. さらに状態族 $\{\rho, \sigma\}$ は E と可換とし, F を E と E_ρ に同時に優越する射影測定とする. このとき次の式が成立する.

$$D^F(\sigma\|\rho) \le D(\sigma\|\rho) \le D^F(\sigma\|\rho) + \log w(E). \tag{27}$$

なお, E と ρ が可換である限り, 補題 9 より E と E_ρ に同時に優越する射影測定は存在する. また E_ρ は状態 ρ のスペクトル分解に対応する射影測定を表すことに注意せよ. この定理は後で重要な定理 (定理 16) を証明する際に使われる.

証明　補題 12 と補題 13 より導かれる. □

補題 12 σ, ρ を $\mathcal{H}$ 上の任意の状態とする. さらに F を E_ρ に優越する射影測定とする. このとき以下の等式を得る.

$$D(\sigma\|\rho) = D^F(\sigma\|\rho) + D(\sigma\|\mathcal{E}_F(\sigma)). \tag{28}$$

証明は Ohya and Petz [16] を見よ.

補題 13 E, F を $F \ge E$ となる 2 つの加算射影測定とする. 状態 σ と E が可換であるとき次の不等式が成立する.

$$D(\sigma\|\mathcal{E}_F(\sigma)) \le \log w(E). \tag{29}$$

[10] $\hbar$ はプランク定数を表す.

証明　$a_i := \mathrm{tr}\, E^i \sigma E^i, \sigma_i := \frac{1}{a_i} E^i \sigma E^i$ とする. 梅垣エントロピーの接合凸性 (joint convexty) より (p.20 pf [16]),

$$D(\sigma \| \mathcal{E}_F(\sigma)) \leq \sum_i a_i D(\sigma_i \| \mathcal{E}_F(\sigma_i)) \leq \sup D(\sigma_i \| \mathcal{E}_F(\sigma_i)) \leq \sup \log \dim E^i = \log w(E).$$

よって題意を得た. □

5　量子相関を許すモデル

これまでの節では複数のサンプルが準備されたときに個々のサンプルを個別に測定する場合について考えていた. しかし，量子系ではサンプル同士を相互作用させてから測定することによって，より推定誤差の小さい推定量を構成することができる．このような測定を量子相関を用いた測定とよぶことにする. なお §1.3 でも述べたようにこのようなサンプル間の相関を用いた推定問題を 量子相関を許すモデル と呼び, 前節までのように相関を用いない推定問題を 量子相関を許さないモデル と呼ぶことにする.

5.1　定式化

以下ではまず n 個のサンプルに対する量子相関を用いた測定を定義するために n 個のサンプルからなる合成系の数学的記述を与える．表現空間が $\mathcal{H}$ となる n 個の粒子からなる量子系の表現空間は拡大テンソル空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ で表され, 状態 ρ が n 個独立に存在するとき合成系上での状態はテンソル状態 $\rho_\theta^{(n)}$ で表される. 拡大テンソル空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ 及びテンソル状態 $\rho_\theta^{(n)}$ の定義は以下で与えられる:

$$\mathcal{H}^{(n)} := \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n}, \quad \rho_\theta^{(n)} := \underbrace{\rho_\theta \otimes \cdots \otimes \rho_\theta}_{n}.$$

上記の条件は単一測定モデルでの i.i.d. 条件に対応する. したがって, 未知状態 ρ_θ が n 個準備されたとき, 我々は n-i.i.d. 状態族 $\mathcal{S}^{(n)} := \{\rho_\theta^{(n)} | \theta \in \Theta\}$ の推定問題を扱うことになる．なお量子相関を許す測定は $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{H}^{(n)})$ の元で表される.

そして表記の簡略のため $P^{M^n}_{\rho_\theta^{(n)}}$ を $P_\theta^{M^n,(n)}$ と表すことにする. そして梅垣エントロピー 及び n-i.i.d. 状態族 $\mathcal{S}^{(n)}$ の SLD Fisher 情報行列について次の等式が知られている.

$$D(\sigma^{(n)} \| \rho^{(n)}) = nD(\sigma \| \rho), \quad \sigma, \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \tag{30}$$

$$J^{\mathcal{S}^{(n)}}_{i,j}(\theta) = nJ^{\mathcal{S}}_{i,j}(\theta). \tag{31}$$

このモデルのおいては,推定量 としては推定値そのものを返す測定 $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{H}^{(n)})$ を考えることにする. 実際, 量子測定 M と $\mathbb{R}^d$ への写像 T の組に対して $M \circ T^{-1}$ を考えれば (M, T) と統計的に同じ振る舞いをする直接推定値を返す測定を構成することができる.

ここで量子相関を許さないモデルでの n 個のサンプルに対する推定量 $(\mathcal{E}^{(n)} := \{M_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\}_{k=1}^n$,

$T^{(n)})$ を $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{H}^{(n)})$ の元として書き直してみる. すると次のように書き直せる.

$$M(B) = \int_{(T^{(n)})^{-1}(B)} \bigotimes_{k=1}^{n} M_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})(d\omega_k). \tag{32}$$

したがって量子相関を許さないモデルでの推定量は, 今考えている推定量のクラスに含まれる .

5.2 量子相関と梅垣エントロピー

Hiai and Petz[13] は (25) において等号が以下に記す意味において漸近的に達成できることを示した. (無限次元への拡張は Petz[18] によりなされた.)

定理 14 任意の状態 $\rho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して, 次の条件を満たす整数 l_n と $\mathcal{H}^{(l_n)}$ 上の測定 M_n の組 (l_n, M_n) の列が取れる.

$$\frac{D^{M_n}(\sigma^{(l_n)} \| \rho^{(l_n)})}{l_n} \to D(\sigma\|\rho) \ \ as\ n \to \infty. \tag{33}$$

しかし, Hiai and Petz [13] はその測定の系列の構成に関しては何も述べていない. ここで Hayashi[24] にならい (33) を満たす測定の系列を構成することにする.

まず始めに表現空間 $\mathcal{H}$ は有限次元 (k) であると仮定する. 一般に直和分解 $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_l$ は各 $\mathcal{H}_i$ への射影の列 $\{P_{\mathcal{H}_i}\}_{i=1}^{l}$ を考えることにより射影測定を表しているとみなすことができる.

今,$\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ のテンソル空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ へのテンソル表現を考える. このテンソル表現の既約分解に対応する射影測定を $\mathrm{Ir}^{(n)}$ で表す.

補題 15 任意の状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して射影測定 $\mathrm{Ir}^{(n)}$ と $\rho^{(n)}$ は可換になる. すなわち, n-*i.i.d.* 状態族 $\{\rho^{(n)} | \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})\}$ と射影測定 $\mathrm{Ir}^{(n)}$ は可換になる.

従って, 補題 7 より n-i.i.d. 状態族 $\{\rho^{(n)} | \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})\}$ に対して $\mathcal{M}_{\mathrm{Ir}^{(n)}}$ は十分である.
証明　ρ の行列式が 0 でないときは Schur の補題から容易に示せる. 一方, ρ の行列式が 0 になるときについては, $\rho_i \to \rho$ となる $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の元の列 $\{\rho_i\}$ を取ってくる. そして $\rho_i^{(n)} \to \rho^{(n)}$ となり $\mathrm{Ir}^{(n)}$ が $\rho_i^{(n)}$ と可換であることから, $\mathrm{Ir}^{(n)}$ は $\rho^{(n)}$ と可換となる. □
従って定理 11 と合わせることによって, 次の定理を得る.

定理 16 M_n を $\mathrm{Ir}^{(n)}$ と $E_{\rho^{(n)}}$ の双方に同時に優越する射影測定とする. このとき, 以下の不等式を得る,

$$\frac{D^{M^n}(\sigma^{(n)} \| \rho^{(n)})}{n} \le D(\sigma\|\rho) \le \frac{D^{M^n}(\sigma^{(n)} \| \rho^{(n)})}{n} + (k-1)\frac{\log(n+1)}{n}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \tag{34}$$

したがって

$$\frac{D^{M^n}(\sigma^{(n)} \| \rho^{(n)})}{n} \to D(\sigma\|\rho) \quad as\ n \to \infty. \tag{35}$$

証明　$\log w(\mathrm{Ir}^{(n)}) \leq (k-1)\log(n+1)$ となることを示せば十分である.

$$w(Ir^{(n)}) = {}_kH_n = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n} = {}_{n+1}H_{k-1} \leq (n+1)^{k-1}.$$

ここで ${}_kH_n$ 重複組合わせを表す. よって題意を得た. □

5.3　大偏差型評価

量子相関を許すモデルでは推定量の系列 $\{M^n\}$ が次の条件を満たすとき 一致推定量 と呼ぶ.

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta^{M^n,(n)}\left(\left\{\|\hat{\theta}-\theta\| \geq \epsilon\right\}\right) = 0. \tag{36}$$

そして量子相関を用いた一致推定量の集合を $\mathcal{C}$ と区別して $\mathcal{C}_Q$ で表すことにする. 次に §3.5 で得られた結果が量子相関を許すモデルではどのように書き換えられるか考える. まず未知パラメータが 1 つのときについて考える. このとき定理 3 は次のように書き換えらる.

定理 17 十分小さい任意の $\epsilon > 0$ に対して式が成立する. なお推定値は $\hat{\theta}$ で表すことにする.

$$\inf_{\{M^n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}_Q} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P_\theta^{M^n,(n)}\left(\left\{\hat{\theta} \geq \theta+\epsilon\right\}\right) = -D(\rho_{\theta+\epsilon}\|\rho_\theta) \tag{37}$$

$$\inf_{\{M^n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}_Q} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P_\theta^{M^n,(n)}\left(\left\{\hat{\theta} \leq \theta-\epsilon\right\}\right) = -D(\rho_{\theta-\epsilon}\|\rho_\theta). \tag{38}$$

従って次の式が得られる.

$$\inf_{\{M^n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}_Q} \frac{1}{n}\log P_\theta^{M^n,(n)}\left(\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right| \leq \epsilon\right\}\right) \geq -\min\left\{D(\rho_{\theta+\epsilon}\|\rho_\theta), D(\rho_{\theta-\epsilon}\|\rho_\theta)\right\}. \tag{39}$$

さらに次の式も成立する.

$$\inf_{\{M^n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}_Q} \liminf_{\epsilon\downarrow 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n}\log P_{\theta,n}^{M^n}\left(\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right| \leq \epsilon\right\}\right) \geq -\frac{1}{2}\tilde{J}^{\mathcal{S}}(\theta). \tag{40}$$

なお $\tilde{J}^{\mathcal{S}}(\theta)$ は以下のように定義される量である.

$$\tilde{J}^{\mathcal{S}}(\theta) := 2\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^2}D(\rho_{\theta+\epsilon}\|\rho_\theta). \tag{41}$$

なお (25) より

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^2}D(\rho_{\theta+\epsilon}\|\rho_\theta) \geq \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^2}D^M(\theta+\epsilon\|\theta)$$

となることから,

$$\tilde{J}^{\mathcal{S}}(\theta) \geq J^{\mathcal{S}}(\theta). \tag{42}$$

となる.§6.3.1 で扱う例からもわかるように一般には等号は成立しない. 定理 17 で述べられた式は全て長岡 [15] において示されている式である. そこで長岡は「(40) の左辺は $-\frac{1}{2}J^{\mathcal{S}}(\theta)$ で与えられる.」との予想を展開している. §6.3.1 ではこの予想を例も用いて検証する.

証明　(37) の「(左辺) $\geq$ (右辺)」の証明は (30) に注意すると (13) の場合と同じようにして示せる.

「(左辺) $\leq$ (右辺)」を示す. 任意の $\delta > 0$ に対して, 左辺の値が $D(\rho_{\theta+\epsilon}\|\rho_\theta) - \delta$ より小さくなる推定量を構成すればよい. 定理 14 より次の条件を満たす整数 l_n と $\mathcal{H}^{(l_n)}$ 上の測定 M_n の組 (l_n, M_n) の列が取れる.

$$\frac{D^{M_n}(\sigma^{(l_n)}\|\rho^{(l_n)})}{l_n} \leq D(\rho_{\theta+\epsilon}\|\rho_\theta) - \delta.$$

この M_n に関して (13) の証明の際に構成した推定量を考えると, 左辺の値が $\frac{D^{M_n}(\sigma^{(l_n)}\|\rho^{(l_n)})}{l_n}$ となる. 従って (37) は示せた. 同様にして (38) が示せ, (39) 及び (40) も示せる. □

次に未知パラメータが複数あるときについて次の定理を得る.

定理 **18** 次の式が成立する.

$$\inf_{\{M^n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}_Q} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\theta^{M^n,(n)} \left(\left\{ \left\| \hat{\theta} - \theta \right\| \geq \epsilon \right\} \right) \quad \geq \quad - \inf_{\theta' \in \Theta} \left\{ D(\rho_{\theta'}\|\rho_\theta) \middle| \|\theta' - \theta\| > \epsilon \right\} \quad (43)$$

さらに次の式も成立する.

$$\inf_{\{M^n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}_Q} \lim_{\epsilon\downarrow 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n} \log P_\theta^{M^n,(n)} \left(\left\{ \left\| \hat{\theta} - \theta \right\| \geq \epsilon \right\} \right) \geq - \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \inf_{\theta' \in \Theta} \left\{ D(\rho_{\theta'}\|\rho_\theta) \middle| \|\theta' - \theta\| > \epsilon \right\}. \quad (44)$$

証明　(43) の証明は (37) の証明と同様にするとよい. また (44) は (43) から導かれる. □

表現空間が有限次元であるとき, 著者は (44) では等号が成立すると予想している. その等号を達成する推定量は以下のように構成されると予想している. まず, 定理 16 で構成した測定 M_n を状態に対して行う. 次に確率分布族 $\{P_\theta^{M^n} | \theta \in \Theta\}$ に対して最尤推定を行う. このままでは一致性は満たされないので, §6.4 で行う補正と同じような補正をして一致性を確保する. しかし, この予想を一般的に検証することは難しく今のところ成功していない.

6　量子光学系

以下では量子系の例として量子光学系を扱う.

6.1　量子光学の基礎

以下, 量子光学系を扱う若干の準備を行う.

6.1.1 コヒーレント状態

量子化された周波数 ω の光の表現空間は §4.4.3 と同じように $L^2(\mathbb{R})$ で表される. 従ってこの節では $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R})$ として話を進める. そして以下の記述の簡略化のため消滅作用素 a および生成作用素 a^* を以下のように定義する.

$$a := \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega Q + iP), \quad a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega Q - iP).$$

そして次の交換関係が成立する.

$$[a, a^\dagger] = 1.$$

ここで $a^\dagger a$ は個数作用素と呼ばれ $\mathbf{n}$ で表される. なお $a^\dagger$ 及び a は self-adjoint 作用素にはならないが個数作用素 $\mathbf{n} := a^\dagger a$ は self-adjoint 作用素になる. 個数作用素 $\mathbf{n}$ は 0 以上の整数値にのみスペクトル (固有値) を持つことが知られている. 固有値 n をもつ $\mathbf{n}$ のノルムが 1 の固有ベクトル (個数ベクトルと呼ぶ.) を $|n\rangle$ で表すことにする.

$$\mathbf{n}|n\rangle = n|n\rangle.$$

このとき次の関係式が成立する.

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

そこで複素振幅 $\alpha \in \mathbb{C}$ を持つコヒーレント状態を定義するために, $L^2(\mathbb{R})$ の元 $\|\alpha\rangle$ [11] を以下のように定義する.

$$\|\alpha\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} |n\rangle.$$

そして振幅を $\alpha \in \mathbb{C}$ に持つ光のコヒーレント状態 $\rho_{\alpha,0}$ は $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ の元として以下のように表される.

$$\rho_{\alpha,0} := \|\alpha\rangle\langle\alpha\|.$$

このコヒーレント状態が背景熱ノイズを受けると次に表す状態 $\rho_{\alpha,N}$ に変化してしまう. ここで N はノイズの大きさに対応し,$N = 0$ のときはノイズの無い状態すなわち先ほどの純粋なコヒーレント状態に対応する.

$$\rho_{\alpha,N} := \frac{1}{\pi N} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{N}} \|\beta\rangle\langle\beta\| \, d^2\beta.$$

$\alpha = 0$ のときについては次のように書き換えられる.

$$\rho_{0,N} := \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{N}{1+N}\right)^k |k\rangle\langle k|.$$

[11] 多くの物理学のテキストでは $|\alpha\rangle$ と表記されているが個数ベクトルと混同しやすいのであえて慣用に逆らって上記の表記を用いた.

6.1.2 Unitary 作用素との交換関係

コヒーレント状態に対しては,

$$e^{i\phi\mathbf{n}}\rho_{\alpha,0}e^{-i\phi\mathbf{n}} = \rho_{\alpha e^{i\phi},0} \tag{45}$$

となる. 従って

$$e^{i\phi\mathbf{n}}\rho_{\alpha,N}e^{-i\phi\mathbf{n}} = \rho_{\alpha e^{i\phi},N} \tag{46}$$

が得られる. $\mathbb{C}$ 上の平行移動のなす群 $G := \mathbb{C}$ を考える. さらに群 G の $\mathcal{H}$ への射影的表現 V を次のように与える.

$$V_g := e^{ga^\dagger - g^* a}, \quad g \in G.$$

$\rho_{\alpha,N}$ は以下のように射影的表現 $\{V_g\}$ に関して以下の共変性を満たす.

$$V_g \rho_{\theta,N} V_g^\dagger = \rho_{\theta+g,N}, \quad \forall\theta \in \Theta, \forall g \in G.$$

6.2 量子光学系での測定

ここで量子光学系でよく知られている測定を 2 つ紹介しておく.

6.2.1 個数測定

まず一つ目は個数測定と呼ばれるもので, 個数作用素 $\mathbf{n}$ のスペクトル分解に対応する射影測定 $E_{\mathbf{n}}$ で表される.

個数測定 $E_{\mathbf{n}}$ でコヒーレント状態 $\rho_{\alpha,0} = \|\alpha\rangle\langle\alpha\|$ を測定すると, 以下に見るように平均値 $|\alpha|^2$ のポアソン分布が得られる.

$$P^{E_{\mathbf{n}}}_{\rho_{\alpha,0}}(\{n\}) = \operatorname{tr} E_{\mathbf{n}}(\{n\})\rho_{\alpha,0} = \operatorname{tr} |n\rangle\langle n| \cdot \|\alpha\rangle\langle\alpha\| = |\langle n| \cdot \|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}e^{-|\alpha|^2}. \tag{47}$$

6.2.2 ヘテロダイン測定

もう一つはヘテロダイン測定と呼ばれるもので測定値集合を $\mathbb{C}$ に持つ測定で H で表される.

$$H(B) := \frac{1}{\pi}\int_B \|\alpha\rangle\langle\alpha\|\, d^2\alpha, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

$\langle n|H(\mathbb{C})|m\rangle = \delta_{n,m}$ となることから, H が測定の条件を満たしていることがわかる. ヘテロダイン測定 H で背景熱ノイズ中のコヒーレント状態 $\rho_{\beta,N}$ を測定すると, 以下に見るように平均値 β , 分散 $N+1$ の $\mathbb{C}$ 上のガウス分布が得られる.

$$\begin{aligned} P^H_{\rho_{\beta,N}}(B) &= \operatorname{tr} H(B)\rho_{\beta,N} = \operatorname{tr} \frac{1}{\pi}\int_B \|\alpha\rangle\langle\alpha\|\, d^2\alpha \cdot \frac{1}{\pi N}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|\beta-\gamma|^2}{N}} \|\gamma\rangle\langle\gamma\|\, d^2\gamma \\ &= \frac{1}{\pi(N+1)}\int_B e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{N+1}}\, d^2\alpha, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

逆に個数確定状態 $|n\rangle\langle n|$ をヘテロダイン測定 H で測定すると以下の確率分布が得られる.

$$P^H_{|n\rangle\langle n|}(B) = \mathrm{tr}\, H(B)|n\rangle\langle n| = \frac{1}{\pi}\int_B \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}e^{-|\alpha|^2}\, d^2\alpha, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

6.3 状態族 $\mathcal{S}_N$

次に以下のように 状態族$\mathcal{S}_N$ の推定問題を考える.

$$\mathcal{S}_N := \left\{ \rho_{\theta^1+i\theta^2,N} \middle| \, \theta = (\theta^1, \theta^2) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \tag{48}$$

以下では量子相関を許さないモデルとして扱う場合の一致推定量の集合を $\mathcal{C}$ で表し, 量子相関を許すモデルとして扱う場合の一致推定量の集合を $\mathcal{C}_Q$ で表す.

なお, 量子相関を許すモデルとして扱うとき, 以下の条件を満たす $\mathcal{H}^{(n)}$ 上の Unitary 作用素 U_n が存在する.

$$U_n^\dagger \underbrace{\rho_{re^{i\phi},N} \otimes \cdots \otimes \rho_{re^{i\phi},N}} U_n = \rho_{\sqrt{n}re^{i\phi},N} \otimes \underbrace{\rho_{0,N} \otimes \cdots \otimes \rho_{0,N}}_{n-1}. \tag{49}$$

従って状態族 $\mathcal{S}_N^{(n)}$ の推定問題は状態族 $\mathcal{S}_N$ を単にパラメータを $\sqrt{n}$ に拡大したモデルと見なすことができる.

6.3.1 局所的大偏差型評価

まず始めに量子相関を許さないモデルとして扱う. このとき状態族 $\mathcal{S}_N$ の SLD Fisher 情報行列は以下のように計算される.

$$J^{\mathcal{S}_N}_{i,j}(\theta) = \frac{2}{N+\frac{1}{2}}\delta_{i,j}.$$

一方, $\sup_{M\in\mathcal{M}} \inf_{\xi\in\mathbb{R}^d} \left\{ \sum_{i,j} J^M_{i,j}(\theta)\xi^i\xi^j \middle| \, \|\xi\| = 1 \right\} = \frac{2}{N+1}$ となることが知られている. 従って以下の式を得る.

$$-\frac{1}{N+1} \geq \inf_{\{(\mathcal{E}^{(n)},T^{(n)})\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}} \lim_{\epsilon\downarrow 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n} \log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}} \left(\left\{ \left\| T^{(n)} - \theta \right\| \geq \epsilon \right\} \right) \geq -\frac{1}{N+\frac{1}{2}}. \tag{50}$$

次に量子相関を用いたモデルとして扱う. このとき梅垣エントロピー $D(\rho_{\alpha,N}\|\rho_{\beta,N})$ は以下のように計算される.

$$D(\rho_{\alpha,N}\|\rho_{\beta,N}) = \|\alpha-\beta\|^2 \log\frac{N+1}{N}. \tag{51}$$

$N=0$ のときすなわち純粋状態のときには (51) の左辺は ∞ になる. 後に定義する一致推定量 $E_\theta^{(n)}$ によって (43) の下限が達成される (§6.4). この一致推定量 $E_\theta^{(n)}$ は θ 取り方には依存する

ものの $\epsilon > 0$ に依存せずに構成される. 従って (44) の下限も達成され, 次の式を得る.

$$\min_{\{M^n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}_Q} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P_\theta^{M^n,(n)}\left(\left\{\left\|\hat{\theta}-\theta\right\| \geq \epsilon\right\}\right) = -\epsilon^2 \log\frac{N+1}{N} \tag{52}$$

$$\min_{\{M^n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}_Q} \lim_{\epsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n}\log P_\theta^{M^n,(n)}\left(\left\{\left\|\hat{\theta}-\theta\right\| \geq \epsilon\right\}\right) = -\log\frac{N+1}{N}. \tag{53}$$

$N = 0$ のときについては $P_\theta^{M^n,(n)}\left(\left\{\left\|\hat{\theta}-\theta\right\| \geq \epsilon\right\}\right) = 0$ となるような一致推定量 $\{E_\theta^{(n)}\}$ が構成できる. ここで (53) の右辺と (50) の右辺を比較する. $N > 1$ のときには一般的に $\log\frac{N+1}{N} > \frac{1}{N+\frac{1}{2}}$ となる. そして $N > 1$ のときの差を調べてみる.

$$\begin{aligned}\log\frac{N+1}{N} - \frac{1}{N+\frac{1}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{N}\right)^n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2N}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{1}{N}\right)^n.\end{aligned}$$

従って N が十分大きいときには両者の差は極めて小さい. ここで $\mathcal{S}_N^r := \{\rho_{\theta,N}|\theta\in\mathbb{R}\}$ のような $\mathcal{S}_N$ の 1 パラメータ部分族を考える. この例では

$$\tilde{J}^{\mathcal{S}_N^r}(\theta) = 2\log\frac{N+1}{N} > \frac{2}{N+\frac{1}{2}} = J^{\mathcal{S}_N^r}(\theta) \tag{54}$$

となる.((42) を参照.) しかも $\mathcal{S}_N$ の 1 パラメータ部分族であることを考えると, (40) の右辺は達成できる. よって §5.3 で述べた長岡の予想はこの例によって否定された.

6.3.2 大域的大偏差型評価

(50),(51),(52),(53) は全て θ に依存した形で議論されていた. θ に依存しない形での大偏差型評価を試みる. なお以下の式では一致推定量 $\{M^n\}_{n=1}^{\infty}, \{(\mathcal{E}^{(n)}, T^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ の各推定量は次に定義する tight 性を満たしていることとする.

定義 19 任意の $\epsilon > 0$ に対して次の条件を満たす $R > 0$ が取れとき推定量 $M^n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{H}^{(n)})$ は *tight* であるという.

$$P_\theta^{M,(n)}(\|\hat{\theta}-\theta\| > R) < \epsilon, \quad \forall\theta\in\mathbb{R}^2.$$

なお量子相関を許さないモデルでの *tight* 性は *(32)* の対応を用いて定義する.

例えば,$\sup_{\theta\in\mathbb{R}^2}\int\|\hat{\theta}-\theta\|^2 P_\theta^{M^n,(n)}(\,d\hat{\theta}) < \infty$ となる推定量 M^n は tihgt 性を満たす. まず量子相関を用いない場合について次の式を得る.

$$\min_{\{(\mathcal{E}^{(n)},T^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}} \lim_{n\to\infty}\sup_{\theta\in\mathbb{C}} \frac{1}{n}\log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{\left\|T^{(n)}-\theta\right\| \geq \epsilon\right\}\right) = -\frac{\epsilon^2}{N+1} \tag{55}$$

$$\min_{\{(\mathcal{E}^{(n)},T^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}} \lim_{\epsilon\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\sup_{\theta\in\mathbb{C}} \frac{1}{\epsilon^2 n}\log P_\theta^{\mathcal{E}^{(n)}}\left(\left\{\left\|T^{(n)}-\theta\right\| \geq \epsilon\right\}\right) = -\frac{1}{N+1}. \tag{56}$$

そして量子相関を用いた場合については次の式を得る.

$$\min_{\{M^n\}\in\mathcal{C}_Q} \lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\mathbb{C}} \frac{1}{n} \log P_\theta^{M^n,(n)} \left(\left\{ \left\| \hat{\theta} - \theta \right\| \geq \epsilon \right\} \right) = -\frac{\epsilon^2}{N+1} \tag{57}$$

$$\min_{\{M^n\}\in\mathcal{C}_Q} \lim_{\epsilon\downarrow 0} \lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\mathbb{C}} \frac{1}{\epsilon^2 n} \log P_\theta^{M^n,(n)} \left(\left\{ \left\| \hat{\theta} - \theta \right\| \geq \epsilon \right\} \right) = -\frac{1}{N+1}. \tag{58}$$

なお (55) から (58) までの全ての式の min は「各サンプルへのヘテロダイン測定を行いその平均値を取る」という推定量の系列で与えられる. なお, n 個のサンプルに対するそのような推定量を H_n で表すことにする.

このような大域的な評価を行うと, 量子相関を用いる効果があらわれないことが分る.

6.3.3 まとめ

$\lim_{\epsilon\downarrow 0}$ のときの大偏差型評価式の下限をまとめること以下のようになる.

	量子相関を許す	量子相関を許さない
局所的	$-\log\left(\frac{N+1}{N}\right)$	$-\frac{1}{1+N}$ 以下 $-\frac{1}{\frac{1}{2}+N}$ 以上
大域的	$-\frac{1}{1+N}$	$-\frac{1}{1+N}$

量子相関を許すモデルでは局所的な評価と大域的な評価で, 顕著な差が現れる. 少なくとも単一測定モデルではそのような差は現れなかった.

なお量子相関を許さない局所的なところは $-\frac{1}{1+N}$ 以下 $-\frac{1}{\frac{1}{2}+N}$ 以上となっているが今のところ $-\frac{1}{1+N}$ になるのではないかと予想されている.

6.4 (52) 及び (53) の下限を達成する推定量の構成

状態族 $\mathcal{S}_N$ を量子相関を許すモデルとして扱い (52) で与えられた下限 $-\epsilon^2 \log \frac{N+1}{N}$ を達成する推定量の構成を試みる. 状態族 $\mathcal{S}_N$ は Shift に関して対称な構造を持っているので $\theta = 0$ でのみ (43) の右辺を達成する推定量を構成すれば同様にして他の点でも右辺を達成する推定量を構成できる.

6.4.1 一致推定量 $\{E_r^{(n)}\}$ の構成

まず最初に $\mathcal{S}_N$ のパラメータを次のように取り直して状態族を $\mathcal{S}'_N$ を定義する.

$$\mathcal{S}'_N := \left\{ \rho_{re^{i\phi},N} \middle| \, r \in \mathbb{R}^+, \phi \in [0, 2\pi) \right\}. \tag{59}$$

まず r のみを推定する一致推定量 $\{E_r^{(n)}\}$ を以下の手続きに従って構成する.

Step 1 $\mathcal{H}^{(n)}$ 上の (49) で定義した Unitary 作用素 U_n で状態を時間発展させる. (量子力学では Unitary 作用素は時間発展を記述することが知られている.)

Step 2 そして時間発展後の 1 番目のサンプル $\rho_{\sqrt{n}re^{i\phi},N}$ を個数測定 $E_{\mathbf{n}}$ で測定する. そして最後に測定値 k に対して r の推定値 $\hat{r} := \sqrt{\frac{k}{n}}$ を対応させる.

一致性を満たすことの証明は §A を見よ. ここで, 以下のようにこの一致推定量の $r = 0$ での大偏差型の評価を行う. 任意の $\epsilon > 0$ に対して次の式を得る[12] .

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr} \rho_{0,N}^{(n)} E_r^{(n)} \left(\{ |\hat{r}| \geq \epsilon \} \right) = \operatorname{tr} \rho_{0,N} E_{\mathbf{n}} \left(\left\{ \sqrt{\frac{k}{n}} \geq \epsilon \right\} \right) \\ = \quad & \operatorname{tr} \frac{1}{N+1} \sum_{k'=1}^{\infty} \left(\frac{N}{1+N} \right)^{k'} |k'\rangle\langle k'| \sum_{k \geq n\epsilon^2} |k\rangle\langle k| = \frac{1}{N+1} \sum_{k \geq n\epsilon^2} \left(\frac{N}{1+N} \right)^{k} = \left(\frac{N}{1+N} \right)^{[n\epsilon^2]}. \end{aligned}$$

従って,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\operatorname{tr} \rho_{0,N}^{(n)} E_r^{(n)} \left(\{ |\hat{r}| \geq \epsilon \} \right) \right) = \epsilon^2 \log \frac{N}{1+N}$$

を得る.

6.4.2 一致推定量 $\{E_0^{(n)}\}$ の構成

しかし, 今構成した推定量の系列は $\mathcal{S}_N$ の一致推定量ではない. ここで $\theta = 0$ において (43) の右辺を達成する $\mathcal{S}_N$ の一致推定量 $\{E_0^{(n)}\}$ を構成する. なお $\{x_n\}$ を $\frac{x_n}{n} \to 0, x_n \to \infty$ as $n \to \infty$ となる正の整数列とする.

Step 1 サンプルを第 1 の組 ($n - x_n$ 個のサンプルからなる) と第 2 の組 (x_n 個のサンプルからなる) にわける.

Step 2 第 1 の組に対しては先ほど構成した $E_r^{(n-x_n)}$ を施し測定値 $\hat{r}$ を得る.

Step 3 第 2 の組に対しては個々の x_n 個のサンプルに対してヘテロダイン測定を行い平均値 $\hat{\theta}'$ を得る.

Step 4 さらに $\hat{\theta} = |\hat{\theta}|e^{i\hat{\phi}}$ となるように $\hat{\phi} \in [0, 2\pi)$ を決める.

Step 5 そして最終的な推定値 $\hat{\theta} := \hat{r}e^{i\hat{\phi}}$ を得る.

これまでの議論と $x_n \to \infty, n - x_n \to \infty$ となることから, $\{E_0^{(n)}\}$ の一致性は確かめられる. また先にも述べたように状態族 $\mathcal{S}_N$ は Shift に関して対称な構造を持っているので他の点でも同じようにして一致推定量 $\{E_\theta^{(n)}\}$ を構成できる.

(52) の下限を達成することは $\frac{x_n}{n} \to 0$ となることから, 次のように示せる.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_0^{E_0^{(n)},(n)} \left(\left\{ \left\| \hat{\theta} \right\| \geq \epsilon \right\} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (n - x_n) \epsilon^2 \log \frac{N}{1+N} = -\epsilon^2 \log \frac{1+N}{N}.$$

これから (56) を達成していることが示せる. なお $E_0^{(n)}$ は tight 性を満たさないが若干の修正することにより, tight にすることができる.

[12] [ ] はガウスの記号を表す.

6.5 ミニマックス法と共変性

以下では $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を同一視して扱うことにする.

$\min_{\{M^n\}\in\mathcal{C}_Q}\sup_{\theta\in\mathbb{C}}\frac{1}{n}\log P_\theta^{M^n,(n)}\left(\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|\geq\epsilon\right\}\right)$ が H_n で与えられることを示す. これが言えると, §6.3.2 の式が全て言える.

6.5.1 ミニマックス法

状態族 $\mathcal{S}_N$ の量子相関を許すモデルとして扱った場合のミニマックス法についてまとめておく. まず危険関数を $W(\theta,\hat{\theta})$ とする. 未知のパラメータが $\theta\in\mathbb{R}^2$ である場合, サンプル数が n であるとする. このとき, 推定量 $M\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{C}),\mathcal{H}^{(n)})$ を採用したときの平均誤差は以下で与えられる. なお以後 $n=1$ のときは添字の (1) を省略するものとする.

$$\mathcal{D}_\theta^{W,(n)}(M):=\int_{\mathbb{C}}W(\theta,\hat{\theta})P_\theta^{M,(n)}(\,d\hat{\theta})=\int_{\mathbb{C}}W(\theta,\hat{\theta})\,\mathrm{tr}\,M(\,d\hat{\theta})\rho_{\theta,N}^{(n)}.$$

ミニマックス法では次に定義する最大誤差を最小化する.

$$\mathcal{D}^{W,(n)}(M):=\sup_{\theta\in\mathbb{C}}\mathcal{D}_\theta^{W,(n)}(M).$$

従って次の値を求める問題に帰着される.

$$\inf_{M\in\mathcal{M}(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}),\mathcal{H}^{(n)})}\sup_{\theta\in\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}}W(\theta,\hat{\theta})\,\mathrm{tr}\,M(\,d\hat{\theta})\rho_{\theta,N}^{(n)}.$$

しかし §6.3 の導入部で述べたことから, 上の n 個のサンプルに対する問題は以下の 1 個のサンプルに対する問題に書き換えられる.

$$\inf_{M\in\mathcal{M}(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}),\mathcal{H})}\sup_{\theta\in\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}}W(\theta,\hat{\theta})\,\mathrm{tr}\,M(\,d\hat{\theta})\rho_{\sqrt{n}\theta,N}.$$

以下では危険関数 W が次のように書ける場合のみ扱うことにする.

$$W(\hat{\theta},\theta)=h(|\hat{\theta}-\theta|).\tag{60}$$

なお h は単調増加関数とする. このような条件の下で

$$\begin{aligned}\min_{M\in\mathcal{M}(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}),\mathcal{H})}\sup_{\theta\in\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}}W(\theta,\hat{\theta})\,\mathrm{tr}\,M(\,d\hat{\theta})\rho_{\theta,N}&=\int_{\mathbb{C}}h(|\hat{\theta}|)\,\mathrm{tr}\,H(\,d\hat{\theta})\rho_{0,N}\\&=\int_{\mathbb{C}}h(|\hat{\theta}|)\frac{1}{\pi N}\int_{\mathbb{C}}e^{-\frac{|\hat{\theta}-\alpha|^2}{N}-|\hat{\theta}|^2}\,d\alpha\,d\hat{\theta}.\end{aligned}\tag{61}$$

となることを示す. すなわち, 条件 (60) の下でヘテロダイン測定がミニマックス法による最適解になることを示す. この式が言えると, $\min_{\{M^n\}\in\mathcal{C}_Q}\sup_{\theta\in\mathbb{C}}\frac{1}{n}\log P_\theta^{M^n,(n)}\left(\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|\geq\epsilon\right\}\right)$ が H_n で与えられることが言える.

6.5.2 共変的推定量

先のミニマックス法を解くために共変的推定量を導入する.

定義 20 推定量 $M \in \mathcal{M}(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}), \mathcal{H})$ が次の条件を満たすとき群 G の作用に関して共変的であるという.

$$V_g^\dagger M(B) V_g = M(B_{-g}), \quad \forall g \in G, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

ただし,

$$B_g := \{\theta + g | \theta \in B\}$$

とおいた.

ここで推定量 M に対して tight 性を課す. 補題 22 より推定量 M が tight であるときは, 適当な共変的測定 $\overline{M}$ が取れて $\mathcal{D}^W(M) \geq \mathcal{D}^W(\overline{M})$ となる. したがって, 以後, 共変的推定量の範囲で $\mathcal{D}^W(M)$ を最小化すればよい. 共変的推定量 M については

$$\mathcal{D}_\theta^W(M) = \mathcal{D}^W(M), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

となる. 任意の共変的推定量 M は適当に $P \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ を取ることによって以下のように表すことができる.

$$M(B) = \frac{1}{\pi} \int_B V_{\hat{\theta}} P V_{\hat{\theta}}^\dagger \, d\hat{\theta}.$$

例えばヘテロダイン測定 H は共変的推定量になり, P として $|0\rangle\langle 0|$ を用いると上の式のように表すことができる. そして次のように変形ができる.

$$\mathcal{D}^W(M) = \mathcal{D}_0^W(M) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} h(|\hat{\theta}|) \operatorname{tr} V_{\hat{\theta}} P V_{\hat{\theta}}^\dagger \rho_{0,N} \, d\hat{\theta} = \operatorname{tr} P \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} h(|\hat{\theta}|) V_{\hat{\theta}}^\dagger \rho_{0,N} V_{\hat{\theta}} \, d\hat{\theta} \right).$$

さらに

$$\hat{W} := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} h(|\hat{\theta}|) V_{\hat{\theta}}^\dagger \rho_{0,N} V_{\hat{\theta}} \, d\hat{\theta} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} h(|\hat{\theta}|) \rho_{\hat{\theta},N} \, d\hat{\theta}$$

とおくと, 共変的測定での $\mathcal{D}^W(M)$ の最小化問題は $\inf_{P \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} \operatorname{tr} P\hat{W}$ となる最小化問題に書き換えられる. また (46) より $\hat{W}$ と $e^{i\phi \mathbf{n}}$ が可換であるから, $\hat{W}$ と $\mathbf{n}$ が可換となる. よって先ほどの最小化問題は $\inf_{0 \leq k} \langle k | \hat{W} | k \rangle$ に書き換えられる. この問題に関して次の補題を得る.

補題 21 h が単調増加関数であるとき $\langle 0 | \hat{W} | 0 \rangle \leq \langle k | \hat{W} | k \rangle$ となる.

従ってこの補題から, ヘテロダイン測定 H が $|0\rangle\langle 0|$ に対応することを考えると, (61) が言えたことになる.

証明 そのとき $\mathbb{R}^+$ 上の測度 h' が取れて $h(x) = h'([0, x])$ となる. 従って $h = \mathbf{1}_{[r,\infty)}$ となるときに示すとよい.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{|\theta|>R}\langle k|\rho_{\theta,N}|k\rangle\,d\theta &= \frac{1}{\pi}\int_{|\theta|>R}\frac{1}{\pi N}\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|\theta-\alpha|^2}{N}}|\langle k||\alpha\rangle|^2\,d^2\alpha\,d^2\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{1}{\pi N}\int_{|\theta|>R} e^{-\frac{|\theta-\alpha|^2}{N}}\,d^2\theta e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^2}{k!}\,d^2\alpha.\end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{\pi N}\int_{|\theta|>R} e^{-\frac{|\theta-\alpha|^2}{N}}\,d^2\theta$ は $|\alpha|$ の単調増加関数になる. これを $f(|\alpha|)$ と表すことにする. すると上の式は次のように書き直せる.

$$\int_0^\infty f(r)e^{-r}\frac{r^k}{k!}\,dr.$$

ここで $r > (k!)^{1/k}$ ならば $e^{-r}\frac{r^k}{k!} \geq e^{-r}$ となり, $r \leq (k!)^{1/k}$ ならば $e^{-r}\frac{r^k}{k!} \leq e^{-r}$ となる. $\int_0^\infty e^{-r}\,dr = \int_0^\infty e^{-r}\frac{r^k}{k!}\,dr = 1$ となることから,

$$\int_0^\infty f(r)e^{-r}\,dr \geq \int_0^\infty f(r)e^{-r}\frac{r^k}{k!}\,dr.$$

よって題意が示せた. □

7 結論

まず始めに適応的な測定選択可能モデルで大偏差型の評価を扱った. 未知パラメータが複数ある場合は (20) にあるように下限が求まっていない. これは今後の課題である.

さらに, このモデルを量子系に適用した場合について考察を行った. 続いて, 量子相関を許すモデルの定式化を行った. しかし, 十分な一般論が完成していないため, 一般的な両者の比較は十分に出来ていない.

そのため状態族 $\mathcal{S}_N$ に絞って両者を比較した. また, この例については局所的な評価と大域的な評価を行い, それらの比較も行った. それを要約したものは, §6.3.3 にまとめられている. このように 2 種類の比較を同時に行ったわけであるが, 両方の比較で顕著な差が見られた. これは, 単一測定モデルでは起らなかった現象である. 今後, このような比較をより一般的視点から行う必要が有る.

さらに同じ例である $\mathcal{S}_N$ についてミニマックス法による誤差評価も行った. 危険関数として真の値と推定値との差の絶対値の単調増加関数を採用した場合, 一般的にヘテロダイン測定が最適解になることを示した.

謝辞

本研究の適応的な測定選択可能モデルに関する部分の大半は東京大学の松本啓史氏との共同研究に基づいています. 日頃から研究を進めるにあたって松本氏から有益な助言を頂きました. 電気通信大学の長岡浩司氏はこの研究を進めるきっかけとなった, 論文 [15] を送って頂きまし

た. 大阪大学の藤原彰夫氏には量子推定理論の重要性おもしろさを教えて頂きました. それから, 京都大学の稲浜譲氏には文献 [11] 及び補題 24 の重要性を教えて頂きました. これらの方にこの場を借りて感謝の意を表します. また §1 を読んで頂いた多くの方に感謝します.

A $\{E_r^{(n)}\}$ の一致性の証明

任意の $r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi)$ 及び $\epsilon > 0$ に関して $n \to \infty$ のとき次の量が 0 に収束することを示せばよい.

$$\operatorname{tr} \rho_{re^{i\phi},N}^{(n)} E_r^{(n)} \left(\{|\hat{r} - r| \geq \epsilon\}\right) = \operatorname{tr} \rho_{\sqrt{n}re^{i\phi},N} E_{\mathbf{n}} \left(\left\{ \left| \sqrt{\frac{k}{n}} - r \right| \geq \epsilon \right\} \right).$$

ここでまず $N = 0$ のときについて考える.

$$\operatorname{tr} \rho_{\sqrt{n}re^{i\phi},N} E_{\mathbf{n}} \left(\left\{ \left| \sqrt{\frac{k}{n}} - r \right| \geq \epsilon \right\} \right) = \sum_{0 \leq k \leq n(r-\epsilon)^2} e^{-nr^2} \frac{(nr^2)^k}{k!} + \sum_{k \geq n(r+\epsilon)^2} e^{-nr^2} \frac{(nr^2)^k}{k!}. \quad (62)$$

まず右辺の第 1 項は次のように評価できる. $(r-\epsilon)^2 \leq \frac{M_2}{M_1}, \frac{M_2+1}{M_1} < r^2$ となるように M_1, M_2 を取ると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{0 \leq k \leq n(r-\epsilon)^2} e^{-nr^2} \frac{(nr^2)^k}{k!} \leq \sum_{0 \leq k \leq n\frac{M_2}{M_1}} e^{-nr^2} \frac{(nr^2)^k}{k!} \leq \sum_{\frac{n}{M_1} \leq k \leq n\frac{M_2+1}{M_1}} e^{-nr^2} \frac{(nr^2)^{k-\left[\frac{n}{M_1}\right]}}{(k - \left[\frac{n}{M_1}\right])!} \\
\leq & \sum_{\frac{n}{M_1} \leq k \leq n\frac{M_2+1}{M_1}} e^{-nr^2} \frac{(nr^2)^k}{k!} \frac{\left(n\frac{M_2+1}{M_1}\right)^{\left[\frac{n}{M_1}\right]}}{(nr^2)^{\left[\frac{n}{M_1}\right]}} \\
\leq & \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nr^2} \frac{(nr^2)^k}{k!} \right) \frac{\left(n\frac{M_2+1}{M_1}\right)^{\left[\frac{n}{M_1}\right]}}{(nr^2)^{\left[\frac{n}{M_1}\right]}} = \left(\frac{\frac{M_2+1}{M_1}}{r^2} \right)^{\left[\frac{n}{M_1}\right]} \to 0 \text{ as } n \to \infty.
\end{aligned}$$

$r^2 \leq \frac{M_4-1}{M_3}, \frac{M_4}{M_3} \leq (r+\epsilon)^2$ とすると (62) の右辺の第 2 項は次のように評価できる.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \geq n(r+\epsilon)^2} e^{-nr^2} \frac{(nr^2)^k}{k!} \leq \sum_{k \geq n\frac{M_4}{M_3}} e^{-nr^2} \frac{(nr^2)^k}{k!} \leq \sum_{k \geq n\frac{M_4-1}{M_3}} \frac{(nr^2)^{k+\left[\frac{n}{M_3}\right]}}{(k + \left[\frac{n}{M_3}\right])!} \\
\leq & \left(\sum_{k \geq n\frac{M_4-1}{M_3}} \frac{(nr^2)^k}{k!} \right) \frac{(nr^2)^{\left[\frac{n}{M_3}\right]}}{\left(n\frac{M_4-1}{M_3}\right)^{\left[\frac{n}{M_3}\right]}} \leq \left(\frac{r^2}{\frac{M_4-1}{M_3}} \right)^{\left[\frac{n}{M_3}\right]} \to 0 \text{ as } n \to \infty.
\end{aligned}$$

従って $N=0$ のとき $\{E_r^{(n)}\}$ が一致推定量であることが示せた.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\,\rho_{\sqrt{n}re^{i\phi},N}E_{\mathbf{n}}\left(\left\{\left|\sqrt{\frac{k}{n}}-r\right|\geq\epsilon\right\}\right)\\
=\;&\mathrm{tr}\int_{\mathbb{C}}e^{-\frac{|\sqrt{n}re^{i\phi}-\alpha|^2}{N}}\|\alpha\rangle\langle\alpha\|\,d^2\alpha E_{\mathbf{n}}\left(\left\{\left|\sqrt{\frac{k}{n}}-r\right|\geq\epsilon\right\}\right)\\
=\;&\mathrm{tr}\int_{\mathbb{C}}e^{-\frac{|\alpha|^2}{N}}\left\|\alpha+\sqrt{n}re^{i\phi}\right\rangle\left\langle\alpha+\sqrt{n}re^{i\phi}\right\|\,d^2\alpha E_{\mathbf{n}}\left(\left\{\left|\sqrt{\frac{k}{n}}-r\right|\geq\epsilon\right\}\right)\\
=\;&\int_{\mathbb{C}}e^{-\frac{|\alpha|^2}{N}}\,\mathrm{tr}\left\|\alpha+\sqrt{n}re^{i\phi}\right\rangle\left\langle\alpha+\sqrt{n}re^{i\phi}\right\|E_{\mathbf{n}}\left(\left\{\left|\sqrt{\frac{k}{n}}-r\right|\geq\epsilon\right\}\right)d^2\alpha.
\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left\|\alpha+\sqrt{n}re^{i\phi}\right\rangle\left\langle\alpha+\sqrt{n}re^{i\phi}\right\|E_{\mathbf{n}}\left(\left\{\left|\sqrt{\frac{k}{n}}-r\right|\geq\epsilon\right\}\right)\\
=\;&\sum_{0\leq k\leq n(r-\epsilon)^2}e^{-nr^2\left|1-\frac{\alpha e^{i\phi}}{\sqrt{n}r}\right|^2}\frac{\left(nr^2\left|1-\frac{\alpha e^{i\phi}}{\sqrt{n}r}\right|^2\right)^k}{k!}+\sum_{k\geq n(r+\epsilon)^2}e^{-nr^2\left|1-\frac{\alpha e^{i\phi}}{\sqrt{n}r}\right|^2}\frac{\left(nr^2\left|1-\frac{\alpha e^{i\phi}}{\sqrt{n}r}\right|^2\right)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

となり $N=0$ と同じようにして, (左辺) $\to 0$ が言える. さらに Lebesgue の定理より (63) 右辺において $\lim_{n\to\infty}$ と積分の順序交換が可能となり, 一致性が示せる.

B　平均化推定量 $\overline{M}$ の構成

この節では以下の補題を示す.

補題 22 *M は tight 性を満たす推定量とする. このとき, 条件 (60) を満たす任意の危険関数 W について $\mathcal{D}^W(M)\geq\mathcal{D}^W(\overline{M})$ となる共変的推定量 $\overline{M}$ が存在する.*

証明　まず始めに推定量 $M\in\mathcal{M}(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}),\mathcal{H})$ に対して推定量 M_g を次のように定義する.

$$M_g(B):=V_gM(B_g)V_g^\dagger,\quad\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

そして半径 $r>0$ の平均化推定量 $\overline{M}_r$ を次のように定義する.

$$\overline{M}_r:=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}M_{r'e^{i\phi}}\,d\phi r'\,dr'. \tag{63}$$

このとき任意の $B\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して

$$\|\overline{M}_r(B)-\left(\overline{M}_r\right)_g(B)\|\leq 4\frac{\|g\|}{r}. \tag{64}$$

そして

$$\max_{|\theta|\leq r} \mathcal{D}_\theta^W(M) \leq \mathcal{D}_0^W(\overline{M}_r). \tag{65}$$

ここで次の条件を満たす無限大に発散する正の実数列 $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ と共変的推定量 $\overline{M}$ が取れることを示す: 任意の $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して, 確率測度の列 $P_\rho^{\overline{M}_{r_n}}$ が $P_\rho^{\overline{M}}$ に収束する. もしこの条件を満たす $\overline{M}$ が取れると, そして (64) より, $\overline{M}$ の共変性が分る. さらに (65) より,

$$\max_{\theta\in\mathbb{C}} \mathcal{D}_\theta^W(M) \leq \mathcal{D}_0^W(\overline{M}) \tag{66}$$

となり, 題意が示せる.

以下 3 段階に分けて証明する.

step 1 まず確率測度 $\mu_{\alpha,r}$ を次のように定義する.

$$\mu_{\alpha,r}(B) := \langle\alpha\|\overline{M}_r(B)\|\alpha\rangle, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

このとき, α を一つ固定すると, 補題 23 を用いると, M の tight 性より $\{\mu_{\alpha,r}\}_{r\in\mathbb{R}^+}$ は相対コンパクトとなる.

ここで $\mathbb{C}$ の稠密な加算集合 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ を取る. そして, 次の条件を満たす正の実数列 $\{r_n^1\}_{n=1}^\infty$ を取る: $r_n^1 \to \infty$ となりかつ, $\{\mu_{x_1,r_n^1}\}_{n=1}^\infty$ が確率測度として収束する. なお, その収束先を μ_{x_1} で表す. さらに帰納的に $\{r_n^{i-1}\}_{n=1}^\infty$ の部分実数列 $\{r_n^i\}_{n=1}^\infty$ を次の条件を満たすように取る: $r_n^i \to \infty$ となりかつ, $\{\mu_{x_i,r_n^i}\}_{n=1}^\infty$ が確率測度として収束する. なお, その収束先を μ_{x_i} で表す. このとき任意の x_i に対して $\mu_{x_i,r_n^n} \to \mu_{x_i}$ となる.

step 2 そして任意の $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{x_i\}_{i=1}^\infty$ に対して $\{\mu_{\alpha,r_n^n}\}$ も確率測度として収束することを示す.

これを示すために, α に収束する $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ の部分列 $\{x_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ を取る.

このとき, $\|\overline{M}_r(B)\| \leq 1$ であるから $\{\mu_{x_{i_k},r}(B)\}_{k=1}^\infty$ は r, B に関して一様に収束する. 従って $\lim_{n\to\infty}\mu_{\alpha,r_n^n}(B)$ は収束し, これを $\mu_\alpha(B)$ で表す. このとき以下の順序交換が可能となる.

$$\mu_\theta(B) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mu_{x_{i_k},r_n^n}(B) = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_{x_{i_k},r_n^n}(B).$$

μ_α が確率測度であることを示すために, σ 加法性を満たすことを示す. $\{B_l\}_{l=1}^\infty$ を互いに disjoint な Borel 集合の加算列とする. このとき $\{\sum_{l=1}^m \mu_{x_{i_k},r}(B_l)\}_{k=1}^\infty$ は $k\to\infty$ のとき m, r に関して一様に収束する. さらに

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^m \mu_{x_{i_k},r_n^n}(B_l) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{l=1}^m \mu_{x_{i_k},r_n^n}(B_l)$$

であるから,

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^\infty \mu_\theta(B_l) &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{l=1}^m \mu_{x_{i_k},r_n^n}(B_l) = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{l=1}^m \mu_{x_{i_k},r_n^n}(B_l)\\ &= \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_{x_{i_k},r_n^n}\left(\bigcup_{l=1}^\infty B_l\right) = \lim_{k\to\infty}\mu_{x_{i_k}}\left(\bigcup_{l=1}^\infty B_l\right) = \mu_\alpha\left(\bigcup_{l=1}^\infty B_l\right).\end{aligned}$$

となり σ 加法性が示せる. よって確率測度の列 $\{\mu_{\alpha,r_n^n}\}_{n=1}^{\infty}$ は確率測度 μ_α に収束する.
step 3　さらに任意の $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して, $\mu_{\rho,n}(B) := \operatorname{tr} \overline{M}_{r_n^n}(B)\rho$ と定義し, $\{\mu_{\rho,n}\}_{n=1}^{\infty}$ も確率測度として収束することを示す. 状態 ρ を $\mathbb{C}$ 上の可積分関数 P で次のように表せることが知られている.

$$\rho = \int_{\mathbb{C}} P(\alpha) \|\alpha\rangle\langle\alpha\| \, d\alpha.$$

ここで $\mu_\rho(B)$ を次のように定義する.

$$\mu_\rho(B) = \int_{\mathbb{C}} P(\alpha)\mu_\alpha(B) \, d\alpha, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

μ_ρ が確率測度であることを示すために, σ 加法性を満たすことを示す. $\{B_i\}$ を互いに disjoint な Borel 集合の加算列とする. 次の式を得る.

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \mu_\rho(B_i) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}} P(\alpha) \sum_{i=1}^{m} \mu_\alpha(B_i) \, d\alpha.$$

ここで $|\sum_{i=1}^{m} \mu_\alpha(B_i)P(\alpha)| \leq |P(\alpha)|$ で $|P(\alpha)|$ は可積分であるので,

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}} P(\alpha) \sum_{i=1}^{m} \mu_\alpha(B_i) \, d\alpha = \int_{\mathbb{C}} P(\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\alpha(B_i) \, d\alpha = \mu_\rho \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right).$$

従って μ_ρ は条件 (21) を確率測度である. よって 確率測度の列 $\{\mu_{\rho,n}\}_{n=1}^{\infty}$ は確率測度 μ_ρ に収束する.
step 4　以上のことから $\rho \mapsto \mu_\rho$ は条件 (21) を満たすので, §4.1 の議論から, 次の条件を満たす $\overline{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}), \mathcal{H})$ が存在する.

$$\mu_\rho(B) = \operatorname{tr} \overline{M}(B)\rho, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}).$$

従って $\overline{M}$ は先の条件を満たすため題意は示せた. □

補題 23 推定量 M が *tight* であれば,

$$\mu_\alpha^g(B) := \langle\alpha\|M_g(B)\|\alpha\rangle, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), \forall g \in G, \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

で定義される確率測度の集合 $\{\mu_\alpha^g\}_{g\in G}$ は相対コンパクト (収束する部分列が取れる) である.

この補題の証明のために次の定義及び補題を準備する. 距離空間 Ω 上の確率分布の集合 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ が以下の条件を満たすとき tight であるという. 任意の $\epsilon > 0$ に対して次の条件を満たすコンパクト集合 $K \subset \Omega$ が取れる: $\mu_i(\Omega \setminus K) < \epsilon, \quad \forall i \in I$. 確率論では以下の補題が知られている [11].

補題 24 距離空間 Ω 上の確率分布の集合 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ が *tight* であることと相対コンパクトであることとは同値である.

補題 23 の証明　　任意の $\epsilon > 0$ に対して, 次の条件を満たす $R > 0$ が取れる.

$$\mathrm{tr}\, M(\|\hat{\theta} - \theta\| > R)\rho_{\theta,N} < \frac{\epsilon}{N+1}.$$

$\rho_{\theta,N} = V_\theta \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle\langle k| \left(\frac{N}{N+1}\right)^k V_\theta^\dagger$ より,

$$\mathrm{tr}\, M(\|\hat{\theta} - \theta\| > R)\|\theta\rangle\langle\theta\| < \epsilon.$$

となる. そして

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha^g \left(\|\hat{\theta}\| > R + \|\theta\|\right) &= \langle\theta\| M_g \left(\|\hat{\theta}\| > R + \|\theta\|\right) \|\theta\rangle \\
&= \langle\theta + g\| M \left(\|\hat{\theta} - g\| > R + \|\theta\|\right) \|\theta + g\rangle \\
&\leq \langle\theta + g\| M \left(\|\hat{\theta} - (g + \theta)\| > R\right) \|\theta + g\rangle < \epsilon.
\end{aligned}$$

よって, 確率測度の集合 $\{\mu_\alpha^g\}_{g\in G}$ は tight となる. 補題 24 より $\{\mu_\alpha^g\}_{g\in G}$ は相対コンパクトとなり題意が示せた. □

参考文献

[1] M. A. Neumark, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sience de l"URSS, vol. **41**, No. **9**, 359-361, (1943).

[2] S. Kullback and R. A. Leibler, Ann. Math. Statist. **22**, 79-86 (1951).

[3] H. Umegaki, Kodai Math. Sem. Rep. **14**, 59 (1962).

[4] H. P. Yuen and M. Lax, IEEE trans. **IT-19**, 740 (1973).

[5] 竹内啓, "統計的推定の漸近理論" (教育出版, 1974).

[6] A.S. Holevo, IEEE trans. **IT-21**, 533 (1975).

[7] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory,* (Academic Press, New York, 1976).

[8] A. Uhlmann, Commun. Math. Phys. **54**, 21 (1977).

[9] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis* (Academic Press, Orlando, 1980).

[10] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[11] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equation Processes* (North-Holland, Amsterdam, 1989).

[12] R. R. Bucklew, *Large Deviation Techniques in Decision, Simulation, and Estimation* (Wiley, New York, 1990).

[13] F. Hiai and D. Petz, Commun. Math. Phys. **143**, 99-114 (1991).

[14] 長岡浩司, "エルミート行列の同時対角化のある一般化とその量子推定理論との関係について," 日本応用数理学会論文誌, vol.1, No.4, 305-318, (1991).

[15] 長岡浩司, "Kullbacl Divergence と Fisher 情報量について -古典系から量子系へ- ," 情報理論とその応用学会ジョイントミニワークショップ講演資料, pp. 63 (1992).

[16] M. Ohya and D. Petz, *Qunatum Entropy and Its Use* (Springer, Berlin, 1993).

[17] 長岡浩司, "量子状態推定の漸近理論について," 数理研究所講究録 **879**, 155 (1994).

[18] D. Petz, J. Funct. Anal. **120**, 82-97 (1994).

[19] 日合文雄, 柳研二郎, "ヒルベルト空間と線形作用素" (牧野書店, 1995).

[20] 長岡浩司, 藤原彰夫, "量子情報理論と相対エントロピー," 数理科学, No. **380**, 50 (1995).

[21] A. Fujiwara and H. Nagaoka, "Coherency in view of quantum estimation theory," in *Quantum coherence and decoherence*, edited by K. Fujikawa and Y. A. Ono, pp. 303 (Elsevier, Amsterdam, 1996).

[22] K. Matsumoto, "A Geometrical approach to quantum estimation theory,"doctoral thesis, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo (1997). METR **96-09**, University of Tokyo (1996). LANL e-print quant-ph/9711008 (1997).

[23] M. Hayashi, "A Linear Programming Approach to Attainable Cramér-Rao Type Bound," in *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, edited by O. Hirota, A. S. Holevo, and C. M. Caves, (Plenum Publishing, New York, 1997).

[24] M. Hayashi, "Asymptotic Attainment for Quantum Relative Entropy," LANL e-print quant-ph/9704040 (1997).

[25] M. Hayashi, "Asymptotic Quantum Parameter Estimation in Spin 1/2 System," LANL e-print quant-ph/9710040 (1997).

[26] M. Hayashi, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 4633 (1998). "Asymptotic estimation theory for a finite dimensional pure state model," LANL e-print quant-ph/9704041.

[27] 林正人, 松本啓史, "測定自由度をもつ統計モデルと量子力学," 数理解析研究所講究録 **1055**, 96-110, (1998).

[28] 松本啓史, “データのとり方を適応的に変えれる場合の一次漸近論の構想,” 情報理論的学習ワークショップ講演資料 (1998).

[29] M. Hayashi, “Asymptotic quantum estimation theory for the displaced thermal states family,” LANL e-print quant-ph/9809002 (1998).

[30] 藤原彰夫, “量子推定理論入門,” “現代数学序説 (II)”(川久保勝夫，宮西正宜 編), 大阪大学出版会, 近刊.

[31] 林正人, “Spin 1/2 系の純粋状態ファミリーの漸近推定理論,” 物性研究掲載予定.