量子推定における今後の課題

林 正人[1]　理化学研究所[2] 脳科学総合研究センター 脳数理研究チーム

1　はじめに

近年量子力学の原理を積極的に用いた情報処理技術が重視されつつある. このような技術には量子力学的対象からより正確に情報を取り出す技術が不可欠となる.

量子力学的世界では物理量の非可換性のため, 一般には複数の物理量を同時に正確に測定することは不可能であるとされている. したがって, 量子力学的世界から情報を読み出すには単に得られた測定値に対するデータ処理の過程を最適化するだけでなく, 測定方法も同時に最適化する必要がある. このような問題を考えることによって, 量子力学的世界が持つ不確定性を原理的な推測精度の限界という視点から議論することができる. 本稿では特に量子力学系での状態推定 (量子推定) に的を絞って議論する. なお , 本稿では確率分布族の推定を古典論とよぶが , 非量子論的という意味であり , 決して古いという意味ではない .

量子推定は 1967 年の Helstrom の SLD Fisher 情報量 (行列) を用いた Cramér-Rao 不等式の量子版に関する論文 [19] に始まったと言って良い . Yuen, Lax[32] により , RLD Fisher 情報行列を用いた理論が展開され , Holevo により一般化された [21]. その後 , 長岡 [30] により 1 次漸近論の視点が導入され , 1 次漸近論について長岡 , 藤原 , 松本 , 林などにより精力的な研究がなされた [4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 10, 17, 16, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31] .

一方 , 本稿で扱う Bayes 推定, ミニマックス推定については , Helstrom[20],Holevo[21] などの研究がある . 群共変的な状態族についての Bayes 推定及びミニマックス推定は , Helstrom により始められ , Holevo[22] により定式化された .

本稿では , これまでほとんど問題にされなかった 2 次の漸近論を扱い , 曲率との関連に注目する . しかし , 一般な問題設定の下で 2 次の漸近論を扱うことは現状では不可能なので , 本稿で紹介する spin coherent 状態族 , boson coherent 状態族 , $\mathfrak{su}(1,1)$ coherent 状態族の 3 つの状態族に注目する .

boson coherent 状態族は古典論における正規分布と同様に状態数が増えても状態族の形が不変であることから , 他の coherent な (§5 参照) 状態族は boson coherent 状態族に漸近する. 本稿では , spin coherent 状態族 , $\mathfrak{su}(1,1)$ coherent 状態族の 2 つの状態族について , 2 次の漸近評価を行うことにより , それらが , boson coherent 状態族に漸近する速さを正確に論じた . また , Levi-Civita 接続のスカラー曲率との関連も論じた .

以下, §2 では量子力学系の定式化 , 及び簡単な性質などを紹介する . より入門的な解説としては林, 松本 [17] がある. §3 では spin coherent 状態族 , boson coherent 状態族 , $\mathfrak{su}(1,1)$ coherent 状態族の 3 つの状態族を紹介する . §4 では量子推定の枠組みを紹介し , §5 で量子推定の中で最も成功している 1 漸近論について簡単に要約する . §6 では Holevo[22] で定式化された群共変的

[1]e-mail address: masahito@brain.riken.go.jp
[2]〒 351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1

な状態族の理論を紹介し，後の節の準備とする．§7 で本稿の主題である，2 次の漸近評価を先にあげた 3 つの状態族について議論し，スカラー曲率との関連を見る．最後に §8 では他の曲率と誤差との関連を指摘する理論との相違点を議論する．

2 量子力学系

2.1 状態及び測定

量子力学系では扱うべき対象に対して Hilbert 空間 $\mathcal{H}$（Hermite 内積付きの有限次元複素ベクトル空間を含む）が対応する. そして, 系の状態は $\mathcal{H}$ 上の Hermite 行列（自己共役作用素）ρ で $\mathrm{Tr}\,\rho = 1, \quad \rho \geq 0$ となるもので記述される. このような行列（作用素）のことを密度行列（密度作用素）という．特に密度行列 ρ が 1 次元射影になるとき, 純粋といい, 純粋でない場合（一次元射影にならない場合）混合という. 任意の状態は純粋な状態の和で（凸結合で）書き表される. 以下，$\mathcal{H}$ 上の密度行列全体を $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で表す.

一方,$\mathcal{H}$ で記述される系への測定は $\mathcal{H}$ 上の正値な行列（作用素）による単位行列（単位作用素）の分解 $M = \{M_\omega\}_\omega (\sum_\omega M_\omega = \mathrm{I}, M_\omega \geq 0)$ で記述される.（標準的な量子力学の教科書を読まれた方は，ここで M_i が射影に限られない点を留意していただきたい.) このような単位行列（単位作用素）の分解を **POVM (Positive Operator Valued Measure,** 正作用素値測度) とよぶ. 量子系の状態が密度行列 ρ で記述されるとき, POVM M に対応する測定を行うと測定値 ω の従う確率分布 P_ρ^M は

$$\mathrm{P}_\rho^M(\omega) = \mathrm{Tr}\,\rho M_\omega \tag{1}$$

となる. ただし, 推定などのような連続的な値を持つ状況では $M = \{M(\hat{\theta})\}_{\hat{\theta}} (\int M(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} = \mathrm{I})$ となる.

例えば古典的な確率分布 $p = \{p_1, \ldots, p_d\}$ は Hilbert 空間 $\mathbb{C}^d$ 上の対角成分が $p_1, p_2, \cdots, p_d$ となる対角な密度行列 $\rho(p)$ を考え, POVM $D = \{D_i\}$ (D_i は第 i 番目の基底への射影）を考えると, 上記の定式化は確率分布を含んだ記述になる. 逆にいうと, 非対角項に成分を持つ密度行列が出てくることが（同時対角化が不可能な複数の密度行列が現れることが）量子系特有の難しさといえる.

そして推定問題では確率分布を対象にする場合と同様に, 真の密度行列があるパラメトライズされた量子状態族 $\mathcal{S} = \{\rho_\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) | \theta \in \Theta\}$ に含まれると仮定して議論することが普通である. なお，各密度行列 $\rho_\theta \in \mathcal{S}$ が互いに可換であるときは各対角成分への射影を POVM として採用すると古典論の問題に帰着できる．

以下, 本稿で用いる物理の慣習にならったベクトルに関する記法について述べる. 縦ベクトルを $|u\rangle = (u_1\, u_2\, \cdots)^T$，その複素共役転置を $\langle u| = (u_1^*\, u_2^*\, \cdots)$ で表わす．積 $\langle u|v\rangle$ は $\sum_i u_i^* v_i$，すなわち，Hermite 内積に等しい．特に，$\langle u|u\rangle = \|u\|^2$ である．また，積 $|u\rangle\langle u|$ は

$$|u\rangle\langle u| = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* & u_2^* & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 u_1^* & u_1 u_2^* & \cdots \\ u_2 u_1^* & u_2 u_2^* & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となる．この行列の rank が 1 で，かつ非負定値 Hermite であることは，すぐに確かめられる．その固有ベクトルは $|u\rangle$，固有値は $\langle u|u\rangle = \|u\|^2$ であり，とくに $\langle u|u\rangle = \|u\|^2 = 1$ ならば，$|u\rangle$ 方向への (一次元) 射影になる．ノルムが 1 であるベクトル $|u\rangle$ を状態とよぶ流儀があるが, 本稿での表現では純粋な状態 $|u\rangle\langle u|$ を指していることになる.

2.2 2 状態間の相違度の尺度

確率分布の場合には 2 つの分布間の相違度を相対エントロピー (または Kullback-Leibler の divergence) $D(p_0\|p_1)$, Hellinger 距離 $d_b(p_0\|p_1)$ や類似度 (Affinity) $A(p_0\|p_1)$ などを用いて測ることが多い. (定義については以下)

$$\begin{aligned} D(p_0\|p_1) &:= \int (\log p_0(\omega) - \log p_1(\omega))\, p_0(\omega)\, d\omega \\ d_b^2(p_0\|p_1) &:= \int \left(\sqrt{p_0(\omega)} - \sqrt{p_1(\omega)}\right)^2 d\omega \\ A(p_0\|p_1) &:= -8 \log \int \sqrt{p_0(\omega)}\sqrt{p_1(\omega)}\, d\omega. \end{aligned}$$

ここで, 類似度の係数 8 は $p_1 \to p_0$ の極限を考えたときに, Fisher 計量に一致するよう定められた.

これらの量の量子力学的対応物として, 量子相対エントロピー $D(\rho_0\|\rho_1)$, Bure の距離 $d_b(\rho_0\|\rho_1)$, 量子類似度 $A(\rho_0\|\rho_1)$ が知られている. (定義については以下)

$$\begin{aligned} D(\rho_0\|\rho_1) &:= \mathrm{Tr}\,\rho_0(\log\rho_0 - \log\rho_1) \\ d_b^2(\rho_0\|\rho_1) &:= 2(1 - \mathrm{Tr}\,|\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}|) \\ A(\rho_0\|\rho_1) &:= -8\log \mathrm{Tr}\,|\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}| = -8\log \mathrm{Tr}\,\sqrt{\sqrt{\rho_0}\rho_1\sqrt{\rho_0}}. \end{aligned}$$

$d_b(\rho_0\|\rho_1)$,$A(\rho_0\|\rho_1)$ は 2 つの引数の入れ替えについて対称である.

確率分布の場合とは異なり, 量子力学系での推定では, 量子相対エントロピー $D(\rho_0\|\rho_1)$ が意味のある量と結び付くことは少なく, むしろ,Bure の距離 $d_b(\rho_0\|\rho_1)$, 量子類似度 $A(\rho_0\|\rho_1)$ を用いた方が有用である場合が多い. 量子相対エントロピー $D(\rho_0\|\rho_1)$ はむしろ, 量子系での状態識別や, 通信路符号化などの離散的な問題と結び付く. 特に, 純粋な状態の場合,Bure の距離や量子類似度では発散しないのに量子相対エントロピーだと発散してしまい, 以下に述べる純粋状態からなる状態族の推定では量子相対エントロピーは全く使えない. ここで $\mathrm{Tr}\,\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}$ ではなく, $\mathrm{Tr}\,|\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}|$ を考えていることに注意されたい. $\mathrm{Tr}\,\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}$ はむしろ検定 (状態識別) 的な文脈で重要になる.

なお, 片方の引数 ρ_1 が純粋であるとき Bure の距離, 量子類似度は以下のように簡略化できる.

$$d_b^2(\rho_0\|\rho_1) = 2(1 - \sqrt{\mathrm{Tr}\,\rho_0\rho_1}), \quad A(\rho_0\|\rho_1) = -4\log \mathrm{Tr}\,\rho_0\rho_1.$$

また,$F(\rho_0\|\rho_1) := (\mathrm{Tr}\,|\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}|)^2$ (片方が純粋であるときは $\mathrm{Tr}\,\rho_0\rho_1$ と一致する) は Fidelity とよばれ, 量子系の種々の議論で重要な役割を果たすことが多い.

その他, 確率分布の場合と同様に量子類似度 $A(\rho_0\|\rho_1)$ に対して $\rho_1 \to \rho_0$ の極限を取ることによって, Riemann 計量を定義することができる. この計量は SLD 計量とよばれ, 推定で重要な役割を果たす. また, この計量の 2 状態 ρ_0, ρ_1 間の状態族内部での測地的距離 $d_r(\rho_0\|\rho_1)$ の 2 乗を 2 状態の離れ度合いとして用いる場合もある. なお, $4d_b^2$ の極限として SLD 計量を定義することも可能である.

2.3 合成系

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2$ の正規直交基底系を $\{|\phi_i^1\rangle\}$, $\{|\phi_j^2\rangle\}$ とする . そして , 形式的な積 $|\phi_i^1 \otimes \phi_j^2\rangle$ を考え , 正規直交基底系が $\{|\phi_i^1\rangle \otimes |\phi_j^2\rangle\}$ となる空間を $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ のテンソル積空間といい , $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ と書く . 有限次元の場合は , $\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim \mathcal{H}_1 \times \dim \mathcal{H}_2$ である .

表現空間が $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ となる 2 つの系をまとめて一つの系とみるとき , これを合成系といい , その表現空間は , テンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ である . もし , 二つの系が一度も過去に相互作用したことがなければ , その合成系の状態は , $\rho_1 \otimes \rho_2 (= \sum_{i,j} w_i^1 w_j^2 |\phi_i^1 \otimes \phi_j^2\rangle\langle\phi_i^1 \otimes \phi_j^2|)$ と書ける . ここで $\rho_1 (= \sum_i w_i^1 |\phi_i^1\rangle\langle\phi_i^1|), \rho_2 (= \sum_j w_j^2 |\phi_j^2\rangle\langle\phi_j^2|)$ は各々 $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ の上の密度行列である . しかし , 二つの系が相互作用したことがあれば , 一般には合成系の状態はこの様には書けない .

今 , 系 $\mathcal{H}_1$ と系 $\mathcal{H}_2$ に各々独立に測定 $\{M_\omega^1\}$ と $\{M_\xi^2\}$ を行ったとする . このとき , これらから得られる測定値の組 (ω, ξ) の同時分布は , 次の様に計算される . すなわち , 系 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の上の状態に測定 $\{M_\omega^1 \otimes M_\xi^2\}_{\omega,\xi}$ に施したときに測定値 (ω, ξ) が得られる確率を (1) を用いて計算すると , それが求めるものになる.

一般には , $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の上の POVM は必ずしも $\{M_\omega^1 \otimes M_\xi^2\}_{\omega,\xi}$ という形には書けない . そういうものを実現するには , 単に独立に二つの系を測定するのではなく , 両者の相互作用を利用するなどの工夫が必要である .

推定では n 個の同一の状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ にある系の合成系を考える. このとき, 合成系 Hilbert 空間は $\mathcal{H}^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n}$ となり, 状態の密度行列は $\rho^{\otimes n} := \underbrace{\rho \otimes \cdots \otimes \rho}_{n}$ となる.

2 つのテンソル積状態 $\rho_0^{\otimes n}, \rho_1^{\otimes n}$ の量子相対エントロピー, 量子類似度, Fidelity については以下の関係式が成り立つ.

$$F(\rho_0^{\otimes n}\|\rho_1^{\otimes n}) = F(\rho_0\|\rho_1)^n, \quad D(\rho_0^{\otimes n}\|\rho_1^{\otimes n}) = nD(\rho_0\|\rho_1), \quad A(\rho_0^{\otimes n}\|\rho_1^{\otimes n}) = nA(\rho_0\|\rho_1).$$

Remark 1 テンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ は直和空間 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ と異なることに注意されたい. 直和空間 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ は正規直交基底系が $\{|\phi_i^1\rangle\} \cup \{|\phi_j^2\rangle\}$ となる空間で, その次元は $\dim \mathcal{H}_1 + \dim \mathcal{H}_2$ である.

3 量子状態族

以下, 本稿で扱うことになる具体的な純粋状態からなる状態族について紹介する.

3.1 spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態と spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態

2 次元複素ベクトル空間上の純粋状態を spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態とよび, これらは以下のようにパラメトライズできる. $\frac{}{2}$ を省略した記号を用いる.

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ \rho_{1,\theta,\phi} := \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta e^{i\phi} \\ \cos\theta\sin\theta e^{-i\phi} & \sin^2\theta \end{pmatrix} = |\theta,\phi\rangle\langle\theta,\phi| \middle| \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right), \phi \in [0,2\pi) \right\}.$$

2 つの spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態 $\rho_{1,0,0}, \rho_{1,\theta,\phi}$ の種々の量はは以下のように計算できる.

$$d_b^2(\rho_{1,0,0}\|\rho_{1,\theta,\phi}) = 2(1-\cos\theta), \quad A(\rho_{1,0,0}\|\rho_{1,\theta,\phi}) = 8\log\cos\theta, \quad d_r^2(\rho_{1,0,0}\|\rho_{1,\theta,\phi}) = 4\theta^2.$$

次に, 同じ spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態 $\rho_{1,\theta,\phi}$ に置かれた j 個の系からなる合成系を考える. するとパラメータの値 θ,ϕ の如何に関わらず, 本来テンソル積空間である合成系の次元は 2^j であるが, テンソル積状態 $(\rho_{1,\theta,\phi})^{\otimes j} = |\theta,\phi\rangle^{\otimes j}\ {}^{j\otimes}\langle\theta,\phi|$ に対応するベクトル $|\theta,\phi\rangle^{\otimes j}$ はその部分空間である対称テンソル積空間 $\mathbb{C}^{j+1}$ に含まれる. したがって, 各テンソル積状態 $\rho_{1,\theta,\phi}^{\otimes j}$ は j 次の対称テンソル積空間 $\mathbb{C}^{j+1}$ の純粋状態と見なすことが可能である. 以下 $\rho_{j,\theta,\phi} := (\rho_{1,\theta,\phi})^{\otimes j}$ を spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態とよび, それらからなる状態族を spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態族とよび $\mathcal{S}_j$ と記す.

2 つの spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態 $\rho_{j,0,0}, \rho_{j,\theta,\phi}$ の種々の量はは以下のように計算できる.

$$d_b^2(\rho_{j,0,0}\|\rho_{j,\theta,\phi}) = 2(1-\cos^j\theta), \quad A(\rho_{j,0,0}\|\rho_{j,\theta,\phi}) = 8j\log\cos\theta, \quad d_r^2(\rho_{j,0,0}\|\rho_{j,\theta,\phi}) = 4j\theta^2.$$

なお,spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態族は以下の意味で自然な $\mathrm{SU}(2)$ 群の作用に関して閉じている. 任意の $g \in \mathrm{SU}(2)$ 及び spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態 $\rho_{1,\theta,\phi}$ に対して状態 $g\rho_{1,\theta,\phi}g^*$ もまた spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態になる. $(g\rho_{1,\theta,\phi}g^*)^{\otimes j} = (g^{\otimes j}(\rho_{1,\theta,\phi})^{\otimes j}(g^{\otimes j})^*)$ となることから, spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態族もまた, j 次の対称テンソル積空間 $\mathbb{C}^{j+1}$ への $\mathrm{SU}(2)$ 群の表現 $g \mapsto g^{\otimes n}$ から導かれる作用の下で閉じている. これらの coherent 状態族への作用は推移的である. (一点の群の作用による軌道が状態族全体になる.)

3.2 boson coherent 状態族

ベクトル $|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |n\rangle, \cdots$ を正規直交基底とする Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ を考える. ($|n\rangle$ に n 次の Hermite 関数を対応させると $\mathbb{R}$ 上の 2 乗積分空間 $L^2(\mathbb{R})$ になる.) この Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ は振動数一定の光子からなる量子系の表現空間になる. このとき状態 $|n\rangle\langle n|$ を光子の個数が n の状態であると見なすことができる. このように粒子の個数 (0 を含む正の整数) に対応するベクトルが表現空間の正規直交基底になる粒子のことを Bose 粒子 (boson) とよぶ. (個数が 0 または 1 に制限される粒子は Fermi 粒子 (fermion) とよばれる.)

次に , boson coherent ベクトル $|\alpha\rangle_a := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle (\alpha \in \mathbb{C})$ を考え, それに対応する密度行列 $\rho_{\infty,\alpha} := |\alpha\rangle_a\ {}_a\langle\alpha|$ は boson coherent 状態とよばれる. boson coherent 状態は比較的安定な状態で量子光学で重要な役割を果たす. (ここで添字に ∞ を用いた理由は後の議論で明らかになるように先の spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態の $j \to \infty$ として捉えることができる点にある.)

そして,boson coherent 状態 $\rho_{\infty,\alpha}$ からなる状態族 $\mathcal{S}_\infty := \{\rho_{\infty,\alpha} \in \mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}))|\alpha \in \mathbb{C}\}$ は boson coherent 状態族とよばれる.

ここで同じ boson coherent 状態 $\rho_{\infty,\alpha}$ に置かれた 2 つの量子系からなる合成系を考える. このとき合成系の状態は $\rho_{\infty,\alpha} \otimes \rho_{\infty,\alpha}$ になるが, 適当なユニタリ変換を施すこと, $\rho_{\infty,\alpha} \otimes \rho_{\infty,\alpha} \mapsto \rho_{\infty,\sqrt{2}\alpha} \otimes \rho_{\infty,0}$ と状態変化が起きる. 一般には s,t に応じて適当なユニタリ変換を施すこと, $\rho_{\infty,\sqrt{s}\alpha} \otimes \rho_{\infty,\sqrt{t}\alpha} \mapsto \rho_{\infty,\sqrt{s+t}\alpha} \otimes \rho_{\infty,0}$ と状態変化が起きる. もし, 未知パラメータ α にのみ注目するのであれば, 1 番目の系のみ注目すれば十分である . これは boson coherent 状態の安定性とも言える性質で, この性質があるため boson coherent 状態族の推定は量子推定全体の中でも基本的かつ重要な意味を持つ. 2 つの boson coherent 状態 $\rho_{\infty,\alpha_1}, \rho_{\infty,\alpha_2}$ の Bure の距離, 量子類似度,Riemann 計量に基づいた距離は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} d_b^2(\rho_{\infty,\alpha_1}\|\rho_{\infty,\alpha_2}) &= 2\left(1-\exp\left(-\frac{|\alpha_1-\alpha_2|^2}{2}\right)\right), \\ A(\rho_{\infty,\alpha_1}\|\rho_{\infty,\alpha_2}) &= d_b^2(\rho_{\infty,\alpha_1}\|\rho_{\infty,\alpha_2}) = 4|\alpha_1-\alpha_2|^2. \end{aligned}$$

なお, 量子相対エントロピーは $\alpha_1 \neq \alpha_2$ のとき発散する.

さらに,boson coherent 状態族は群表現から導かれる作用に対して閉じている. 今ここで対角成分が 1 となる上半 3 角行列なす群 $\left\{ t(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ の $L^2(\mathbb{R})$ への表現 $V(t(a,b,c)) := e^{ic}e^{iaP}e^{ibQ}$ を考える. (Q,P はそれぞれ $L^2(\mathbb{R})$ 上の掛け算作用素, 微分作用素の $-i$ 倍を表す. これが群の表現であることは $[Q,P]=i$ であることから確認できる.)

この群の作用の下で, 以下の関係式が成り立つ.

$$V(t(a,b,c))\rho_{\infty,\alpha}V(t(a,b,c))^* = \rho_{\infty,\alpha+(a+bi)}.$$

この作用は boson coherent 状態族に対して推移的である.

3.3 $\mathfrak{su}(1,1)-\lambda$ coherent 状態族

量子光学では boson coherent 状態の次に扱いやすい状態としてスクイズド状態が知られている. 以下ではスクイズド状態を一般化した $\mathfrak{su}(1,1)-\lambda$ coherent 状態を扱う. なお, スクイズド状態の定義及び $\mathfrak{su}(1,1)-\lambda$ coherent 状態がスクイズド状態の一般化になっていることについては [15] を参照のこと. はじめに,

$$[e_0,e_\pm] = \pm 2e_\pm, \quad [e_+,e_-] = e_0$$

となる交換関係を満たす基底 $\{e_0,e_+,e_-\}$ から構成される Lie 代数 $\mathfrak{su}(1,1)$ の既約な skew adjoint 表現を考える. すなわち,

$$[E_0,E_\pm] = \pm 2E_\pm, \quad [E_+,E_-] = E_0$$

なる交換関係を満たす Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の skew adjoint 作用素 (i 倍すると自己共役になる作用素) の 3 つ組 (E_0, E_+, E_-) を $\mathfrak{su}(1,1)$ の skew adjoint 表現とよび, この表現を下に coherent 状態を構成する. まずここで, 3 つ組 (E_0, E_+, E_-) をもとに 3 つ組 (L_0, L_+, L_-) を以下で定義する.

$$L_0 := i(E_- - E_+), \quad L_\pm := \big(E_0 \pm i(E_+ + E_-)\big)/2.$$

これらは以下の関係を満たす.

$$[L_0, L_\pm] = \pm 2L_\pm, \quad [L_+, L_-] = L_0, \quad L_0^* = L^0, \quad L_+^* = L_-. \tag{2}$$

さらに , 表現の既約性より , 表現は $\ker L_+, \ker L_-$ によって以下の 3 つに分類される.

$$\begin{aligned}
&\text{Case 1} : \dim\ \mathrm{Ker}\ \ L_+ = 0, \quad \dim\ \mathrm{Ker}\ \ L_- = 1 \\
&\text{Case 2} : \dim\ \mathrm{Ker}\ \ L_+ = 1, \quad \dim\ \mathrm{Ker}\ \ L_- = 0 \\
&\text{Case 3} : \dim\ \mathrm{Ker}\ \ L_+ = 0, \quad \dim\ \mathrm{Ker}\ \ L_- = 0.
\end{aligned}$$

以下では Case 1 の場合にのみ限定して話を進める.

$|0\rangle$ を規格化された (ノルム 1 の) $\ker L_-$ の固有ベクトルとする. このとき $|0\rangle$ は L_0 の固有ベクトルになり, その固有値 λ は正の実数になる. そして, $|n\rangle := \frac{1}{\|L_+^n|0\rangle\|} L_+^n|0\rangle$ とすると以下の関係式が成り立つ.

$$L_0|n\rangle = (\lambda + n)|n\rangle, \quad L_+|n\rangle = \sqrt{(n+1)(\lambda+n)}|n+1\rangle, \quad L_-|n\rangle = \sqrt{n(\lambda+n-1)}|n-1\rangle.$$

Case 1 の表現は表現の既約性から最小固有値 λ の値だけで分類される. このような準備の下で任意の $\zeta \in D$ (D は単位円板) に対して $\mathfrak{su}(1,1) - \lambda$ coherent ベクトル $|\zeta\rangle_{a,\lambda}$ を以下で定義する.

$$\begin{aligned}
|\zeta\rangle_{a,\lambda} &:= U\left(\frac{1}{2} e^{i\arg\zeta} \ln\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\right)\ |0\rangle \\
&= \exp(\zeta L_+) \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1-|\zeta|^2)\ L_0\right) \exp(\zeta^* L_-)\ |0\rangle \\
&= (1-|\zeta|^2)^{\lambda/2} \exp(\zeta L_+)\ |0\rangle.
\end{aligned}$$

ここでユニタリ作用素 $U(\xi)$ は

$$U(\xi) := \exp\big(\xi L_+ - \xi^* L_+^*\big)$$

と定義した. そして純粋状態 $\rho_{-\lambda,\zeta} := |\zeta\rangle_{a,\lambda}\ {}_{\lambda,a}\langle\zeta|$ を $\mathfrak{su}(1,1) - \lambda$ coherent 状態とよび, それらが構成する状態族を $\mathfrak{su}(1,1) - \lambda$ coherent 状態族とよび $\mathcal{S}_{-\lambda}$ と記す. ここで添字 $-\lambda$ を用いた理由は後に議論するように, ある意味で先の spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態の j が負の場合と捉えることが可能であるからである.

次に $\rho_{-\lambda,\zeta}$ の 2 回のテンソル積状態 $\rho_{-\lambda,\zeta}^{\otimes 2}$ は $\mathfrak{su}(1,1)$ の skew-adjoint 表現 $(E_0\otimes \mathrm{I}+\mathrm{I}\otimes E_0, E_+\otimes \mathrm{I}+\mathrm{I}\otimes E_+, E_-\otimes \mathrm{I}+\mathrm{I}\otimes E_-)$ の下 (この表現の最低固有値は 2λ となる.) で $\mathfrak{su}(1,1)-2\lambda$ coherent 状態 $\rho_{-2\lambda,\zeta}$ になる. 同様に n 回テンソル積状態 $\rho_{-\lambda,\zeta}^{\otimes n}$ は $\mathfrak{su}(1,1)-n\lambda$ coherent 状態 $\rho_{-n\lambda,\zeta}$ と見なすことができる.

2 つの $\mathfrak{su}(1,1)-\lambda$ coherent 状態 $\rho_{-\lambda,0}, \rho_{-\lambda,\zeta}$ 間の種々の量は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} d_b(\rho_{-\lambda,0}\|\rho_{-\lambda,\zeta}) &= 2(1-(1-|\zeta|^2)^{\frac{\lambda}{2}}), \quad A(\rho_{-\lambda,0}\|\rho_{-\lambda,\zeta}) = -4\lambda\log(1-|\zeta|^2), \\ F(\rho_{-\lambda,0}\|\rho_{-\lambda,\zeta}) &= (1-|\zeta|^2)^{\lambda}, \quad d_r^2(\rho_{-\lambda,0}\|\rho_{-\lambda,\zeta}) = \lambda\left(\log\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\right)^2. \end{aligned}$$

なお, $\lambda=\frac{1}{2}$ のときの, $\mathfrak{su}(1,1)-\frac{1}{2}$ coherent 状態は量子光学で重要な役割を果たすスクイズド状態と一致する [15]. また, λ が整数であるときには, $\mathfrak{su}(1,1)$ 代数の skew adjoint 表現から $\mathrm{SU}(1,1)$ 群のユニタリ表現が構成できるが, それ以外のときは $\mathrm{SU}(1,1)$ 群のユニタリ表現は存在しない. その普遍被覆群 $\widehat{\mathrm{SU}(1,1)}$ の表現がある. λ が半整数であれば, その 2 重被覆群 $\widetilde{\mathrm{SU}(1,1)}$ の表現が構成できる.

4 量子推定の枠組み

4.1 ミニマックス法,Bayes 法, 許容性

量子系 $\mathcal{H}$ 上の状態族 $\mathcal{S}=\{\rho_\theta\in\mathcal{S}(\mathcal{H})|\theta\in\Theta\}$ に対する推定量はパラメータ空間 Θ 上に値を持つ $\mathcal{H}$ 上の POVM M で記述される. この推定量の精度は真値が θ であるときに推定値を $\hat{\theta}$ としたときの誤差を表す関数 $W(\theta,\hat{\theta})$ (risk 関数) を用いて以下で定義される.

$$\mathcal{D}_\theta^W(M) := \int_\Theta W(\theta,\hat{\theta})\,\mathrm{Tr}\,M(\,d\hat{\theta})\rho_\theta.$$

W としてはパラメータ空間 Θ が $\mathbb{R}^d$ の部分空間であるときは平均 2 乗誤差 $MSE(\theta,\hat{\theta}) := \|\theta-\hat{\theta}\|^2$ がよく使われる. 他に $D(\rho_\theta\|\rho_{\hat{\theta}}), A(\rho_\theta\|\rho_{\hat{\theta}}), d_b^2(\rho_\theta\|\rho_{\hat{\theta}}), d_r^2(\rho_\theta\|\rho_{\hat{\theta}}), 1-F(\rho_\theta\|\rho_{\hat{\theta}})$ などが使われる. 後に述べたこれらの量は全て座標の取り方に依存せず, またユニタリ行列 (作用素) の作用の下で不変である.

推定量の最適化の基準としてミニマックス法では

$$\mathcal{D}^W(M) := \sup_{\theta\in\Theta}\mathcal{D}_\theta^W(M)$$

を最小化する M を選ぶ戦略が取られる. また,Bayes 法では

$$\mathcal{D}^{W,\nu}(M) := \int_\Theta \mathcal{D}_\theta^W(M)\nu(\,d\hat{\theta})$$

を最小化する M を選ぶ戦略が取られる. ここで ν は事前分布とよばれ, あらかじめ適当にパラメータ空間上に定義された確率分布である. 特に , 事前分布 ν の下での Bayes 法で risk 関数

を $-\delta(\theta-\hat{\theta})$ に用いた場合は最尤法の量子版とみなすことができる．もし，状態族 $\mathcal{S}$ が互いに可換な密度行列ならなるのであれば，古典的な場合の最尤法と一致する．ただし，一般には状態族 $\mathcal{S}$ に属する密度行列は互いに非可換であり，その場合には， risk 関数が $-\delta(\theta-\hat{\theta})$ であっても，Bayes 解は事前分布 ν に依存する．

2 つの推定量 M_1, M_2 について

$$\mathcal{D}_\theta^W(M_1) \geq \mathcal{D}_\theta^W(M_2), \quad \forall\theta\in\Theta$$

が成り立ち, 少なくとも 1 つの $\theta\in\Theta$ で

$$\mathcal{D}_\theta^W(M_1) > \mathcal{D}_\theta^W(M_2)$$

が成り立つとき, M_2 は M_1 に対して優越するという. 推定量 M に対して優越する推定量が存在しないとき M は許容的であるという.

4.2 量子 i.i.d. 条件と推定量の 3 つのクラス

一般に統計的推測を行うには同一の未知の確率分布に従うデータが複数存在していなければならない. 量子状態の推定の場合は, それと同様の状況としてある同一と見なせる粒子発生装置を, 同一の条件で複数 (n) 回, 繰り返して用いた場合などが考えられる. こうして得られた粒子の状態は同一と見なして支障は無いと思われる. 合成系上の状態はテンソル積状態 $\rho^{\otimes n}$ になると考えられる. (量子 **i.i.d.** 条件) したがって n 個の系からなる合成系 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の上にある, テンソル積拡大された状態族 $\mathcal{S}^{\otimes n} := \{\rho^{\otimes n}\in\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes n})|\theta\in\Theta\}$ に対する推定問題を考えることになる. もちろん, テンソル積拡大された状態族に対して $\mathcal{D}_\theta^W(M)$ や $\mathcal{D}^W(M), \mathcal{D}^{W,\nu}(M)$ などの議論をすることになる. 最適化の対象となる M はテンソル積空間 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の POVM である. これらの POVM に対してミニマックス法や Bayes 法などを適用することになる.

だが,$\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の 任意の POVM に対応する測定を実行するには各系間の相互作用を可能な限り積極的に利用する必要があり, 極めて困難である. ここで, 以下のような 2 つの合成系 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の POVM の制限されたクラスを考えることにする.

一つ目のクラスでは n 個の系を全く相互作用させずに順次測定する．このとき, 全ての系に対して全く同じ POVM に対応する測定を行うこととする. こうして構成される推定を「量子相関を用いない非適応的な推定」とよぶ.

もう一つのクラスでは n 個の系を全く相互作用させずに順次測定するが, $k-1$ 番目までの測定値 $(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\in\Omega^{k-1}$ に依存させて, k 番目に行う測定 $M^{(k)}_{\omega_1,\ldots,\omega_{k-1}}$ を選ぶことが可能とする. 言い換えると，前回までの測定で得られた情報を使って次の測定の選択に役立てることを許すのである．こうして構成される推定を「量子相関を用いない適応的な推定」とよぶが，これは古典的な適応的な実験計画に通じる問題設定である [16]．ここで，Remark 2 で述べるように，$M^{(k)}_{\omega_1,\ldots,\omega_{k-1}}$ としては全ての $\mathcal{H}$ 上の POVM を許すことにする．このような測定は以下のよ

うな合成系上の POVM で書けることが確認できる.

$$M^n = \left\{ M^{(1)}_{\omega_1} \otimes M^{(2)}_{\omega_1,\omega_2} \otimes M^{(3)}_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} \otimes \cdots \otimes M^{(n)}_{\omega_1,\dots,\omega_n} \right\}_{(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\Omega^n},$$

$$M^{(k)}_{\omega_1,\dots,\omega_k} = (M^{(k)}_{\omega_1,\dots,\omega_k})^* \geq 0, \quad \sum_{\omega_k\in\Omega} M^{(k)}_{\omega_1,\dots,\omega_k} = \mathrm{I} \quad (k = 1,\dots,n).$$

これらに制限されたクラスでの推定に対して合成系上の全ての POVM を許す推定を「量子相関を用いる推定」とよぶ.

Remark 2 全ての実行可能な測定は (1) の意味で POVM で記述されることは，広く認められた事実である．しかし，逆に任意の POVM について，それに対応する測定が実現可能かどうかについては，疑問視する声もある．

そのことを承知した上で，本稿では全ての POVM に対応する測定の実現可能性を仮定して，種々の最適化問題を扱う．これは簡単の為の仮定であるが，もし最適解の POVM が実行可能であれば, この問題設定は十分意味を持つ. 実際，後の §7.2 で述べるように，boson coherent 状態族では最適解が簡単な実験系で実現できる．spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態族でも,§7.1 で述べるように，後に述べる意味で最適に近い POVM が簡単な実験系で実現できる．また，本稿では述べないが，spin $\frac{1}{2}$ 系の混合状態からなる系での「量子相関を用いない適応的な推定」でも，最適解は簡単に実現できる [31][9]．その他，boson coherent 状態をガウス分布で重ね合わせてできる状態族 (量子 Gauss 状態族) の推定でも漸近的に最適な推定が比較的容易に実現できる [17].

Remark 3 一般に古典的な問題設定での「同一」の実験でも, 行われた場所，少なくとも時間は異なっている．同様に量子系で同じ系とよばれるものは系として記述される部分が同じである (または同じと見なせる) というだけである. 他の部分ではこれらは大抵異なっており，完全に「同一」ではない．したがって Bose 統計的，または Fermi 統計的な扱いにはならない.

また，ここでは同一と見なせる状態が複数準備されていることを仮定しているのであって，同じ状態の複製を作るわけではない．状態の複製は一般には不可能である．

5 1 次漸近論

以下では n 回テンソル空間 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の推定量 M_n を考え, その無限列 $\mathfrak{M} = \{M_n\}$ に対して risk 関数 $W(\theta,\hat{\theta})$ の下で

$$\mathcal{C}^W_{\theta_0}(\mathfrak{M}) := \limsup_{\theta\to\theta_0} \limsup_{n\to\infty} n\mathcal{D}^W_\theta(M_n)$$

を考える. そして, その下限

$$\mathcal{C}^W_\theta := \inf_{\mathfrak{M}} \mathcal{C}^W_\theta(\mathfrak{M})$$

を Cramér-Rao 型の下限とよぶ. これまでパラメータ空間 Θ が $\mathbb{R}^d$ に含まれているとし, risk 関数を $MSE(\theta,\hat{\theta}) = \|\theta-\hat{\theta}\|^2$ としたときの下限 $\mathcal{C}^{MSE}_\theta$ に注目することが多かった. なぜな

ら, $W(\theta,\hat{\theta}) \cong \|\theta-\hat{\theta}\|^2 + o(\|\theta-\hat{\theta}\|^2), \quad (\|\theta-\hat{\theta}\|^2 \ll 1)$ である限り, $\mathcal{C}_\theta^W$ は $\mathcal{C}_\theta^{MSE}$ に一致すると考えられるからである. もし,$W(\theta,\hat{\theta}) \cong O(\|\theta-\hat{\theta}\|^2)$ であるなら, 適当な座標変換を施すと $W(\theta,\hat{\theta}) \cong \|\theta-\hat{\theta}\|^2 + o(\|\theta-\hat{\theta}\|^2)$ とできるので, 1 次漸近論を扱う限りにおいてはやはり従来どおり risk 関数を $MSE(\theta,\hat{\theta})$ としたときに注目しておけば十分である. 以下では $\mathcal{C}_\theta^{MSE}$ を $\mathcal{C}_\theta$ と省略する. なお, この問題での一次の漸近理論は既に十分な蓄積があり, 本稿では後の議論に必要な程度に簡単に紹介する.

初期の研究では局所不偏性条件の下で共分散行列の対角和を最小化するアプローチが取られた. この研究は [12] を見れば分かるように, 上で定義した $\mathcal{C}_\theta$ を求める研究に直結している. 最も初期の研究 [19] は Fisher 行列の量子版の 1 つである SLD Fisher 行列を用いて下限 $\mathcal{C}_\theta$ を評価する方法である. SLD Fisher 行列 $J_{\theta;i,j}$ は各パラメータ θ^i の SLD(対称対数微分)L_i は $\frac{1}{2}(L_i\rho+\rho L_i) = \frac{\partial\rho_\theta}{\partial\theta^i}$ となる Hermite 行列 L_i として定義した上で, $J_{\theta;i,j} := \mathrm{Tr}\,\rho_\theta L_i L_j$ として定義される.

特にパラメータ数 d が 1 のときは$\mathcal{C}_\theta = J_\theta^{-1}$ となることが知られており,「量子相関を用いない適応的な推定」で一様に限界$\mathcal{C}_\theta$ が達成されることが知られている. 多次元で L_i と L_j $(i \neq j)$ が非可換であるときには一般には, $\mathcal{C}_\theta^H \geq \mathrm{tr}\, J_\theta^{-1}$ となる. なお, ここで定義された SLD 内積は先に $A(\rho_0\|\rho_1)$ または $4d_b^2(\rho_0\|\rho_1)$ の極限として定義された内積と一致することが確認できる [24].

その他, 対数微分及び Fisher 情報行列の量子版として以下のの RLD(右対数微分) がある. パラメータ θ^i の RLD(右対数微分) は $\rho\tilde{L}_i = \frac{\partial\rho_\theta}{\partial\theta^i}$ となる行列として定義され, RLD Fisher 行列は $\tilde{J}_{\theta;i,j} := \mathrm{Tr}\,\rho_\theta\tilde{L}_i\tilde{L}_j$ で定義される. RLD を用いて $\lambda_\theta(\vec{\tilde{L}})$ を考え, この量を $\mathcal{C}_\theta^R$ と記し,RLD 下限と呼ぶ. ただし, そして, 行列に値をもつベクトル $\vec{\tilde{L}} = \{\tilde{L}^i\}_{i=1}^d$ 及び, $\lambda_\theta(\vec{X})$ は

$$\begin{aligned}
\tilde{L}^i &:= \sum_j (\tilde{J}_\theta^{-1})^{i,j}\tilde{L}_j \\
\lambda_\theta(\vec{X}) &:= \mathrm{tr}\, Z_\theta(\vec{X}) + \mathrm{tr}\,|\,\mathrm{Im}\, Z_\theta(\vec{X})| \\
(Z_\theta(\vec{X}))^{i,j} &:= \mathrm{Tr}\,\rho_\theta X^i (X^i)^*
\end{aligned}$$

と定義される. $\mathcal{C}_\theta \geq \mathcal{C}_\theta^R$ と評価できることが知られている.

以下に定義する Holevo 下限 $\mathcal{C}_\theta^H$ は SLD Fisher 行列から導かれる下限や RLD 下限 $\mathcal{C}_\theta^R$ よりもよい評価を与える. すなわち $\mathcal{C}_\theta \geq \mathcal{C}_\theta^H \geq \max\{\mathcal{C}_\theta^R, \mathrm{tr}\, J^{-1}\}$ となる.

$$\mathcal{C}_\theta^H := \inf_{\vec{X}=(X^1,\cdots,X^d)} \left\{ \lambda_\theta(\vec{X}) \,\middle|\, \mathrm{Tr}\, X^i \frac{\partial\rho_\theta}{\partial\theta^j} = \delta_j^i \right\}.$$

かなり一般性のある条件の下で $\mathcal{C}_\theta^H$ が $\mathcal{C}_\theta$ と一致することが確認できている. 特に純粋状態から状態族では, $\mathcal{C}_\theta^H = \mathcal{C}_\theta$ が示されており, その場合については,「量子相関を用いない適応的な推定」で一様に限界 $\mathcal{C}_\theta$ を達成することが知られている [25]. 逆に , 混合状態からなる状態族については一般に「量子相関を用いる推定」と「量子相関を用いない適応的な推定」との間には , $\mathcal{C}_\theta$ の値が異なることが知られている [17] .

なお,Holevo 下限は $\mathcal{C}_\theta^H$ 以下に定義する D 作用素 D_θ の作用の下で, SLD が張るベクトル空間 $\langle L^1,\cdots,L^d\rangle$ が不変であるとき, 比較的計算の容易な RLD 下限 $\mathcal{C}_\theta^R$ と一致する. 行列 X に

対して $D_\theta(X)$ は

$$i(X\rho_\theta - \rho_\theta X) = \frac{1}{2}\left(D_\theta(X)\rho_\theta + \rho_\theta D_\theta(X)\right)$$

を満たすものとして定義される.

例えば, 純粋状態からなる状態族が D-作用素の下で不変であり,$J_\theta = \mathrm{I}$ であるとき, $\mathcal{C}_\theta^R = 2\,\mathrm{tr}\,J_\theta^{-1} = 2 \times (\text{モデルの次元}) = 2d$ となる [5, 6]. このような状態族は **coherent** と言われる. coherent な状態族については, 座標の取り方に依存しない risk 関数 $1-F, A, d_b^2, d_r^2$ について以下の式が成立する.

$$\mathcal{C}_\theta^A = \mathcal{C}_\theta^{d_r^2} = 4, \quad \mathcal{C}_\theta^{1-F} = \mathcal{C}_\theta^{d_b^2} = 1.$$

例えば §3 で紹介した状態族はすべて coherent である.

このように 1 次漸近理論については, かなり限界の計算が進んでいる. 一方で, より高次の漸近理論や非漸近的枠組みでの (すなわち n が有限のときの) 推定量の最適化の問題が今まで扱われてこなかった. 特に 2 次の漸近論では risk 関数を何に取るかで結論が変ってくる可能性があり,risk 関数の選択には慎重を要する. 古典論ではバイアス補正などの議論が 2 次の漸近論に必要になる要因の 1 つに座標に依存した risk 関数を選択していることが考えられる. やはり, 座標不変な risk 関数の下での議論が必要になると思われる.

そのほか, 述べた推定量の許容性などについてもまだほとんど議論されていない. しかも, このような問題は極めて一般的取り扱いが難しく, 状態族に対して条件を課した上で, 特殊な例についてのみ議論することしかできないのが現状である.

6 群対称な状態族の一般論

以下では, 先に述べた boson coherent 状態族や spin $\frac{j}{2}$ 状態族のように群の作用に関して共変的な状態族に対する非漸近的な取り扱いの下でのミニマックス法や Bayes 法について述べる. 以下の内容は Holevo[22] により定式化された. 群 G の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ へのユニタリ表現 V を考え, 状態族 $\mathcal{S} := \{\rho_\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) | \theta \in \Theta\}$ が群 G の作用 $\rho_\theta \mapsto V_g \rho_\theta V_g^*$ の下で不変であるとき, 状態族 $\mathcal{S}$ はユニタリ表現 V について共変的という. 特に, 状態 $V_g\rho_\theta V_g^*$ を $\rho_{g\theta}$ と記すことにする.

ユニタリ表現 V について共変的な状態族 $\mathcal{S}$ に対して, 推定量 M が以下の条件を満たすとき推定量 M は共変的とよばれる.

$$V_g M(\hat{\theta}) V_g^* = M(g^{-1}\hat{\theta}), \quad \forall g \in G, \forall \hat{\theta} \in \Theta.$$

共変的な状態族 $\mathcal{S}$ については次の量子 Hunt-Stein の定理が成り立つ.

定理 1 risk 関数 W が群 G の作用に関して不変とする. このとき, 以下の式が成り立つ.

$$\min_M \mathcal{D}^W(M) = \min_{M:\mathrm{COV}} \mathcal{D}^W(M).$$

さらに, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の次元が有限であり, Θ 上の事前分布 ν が群 G に関して不変であるならば,

$$\min_M \mathcal{D}^W(M) = \min_M \mathcal{D}^{W,\nu}(M) = \min_{M:\mathrm{COV}} \mathcal{D}^W(M) = \min_{M:\mathrm{COV}} \mathcal{D}^{W,\nu}(M)$$

となる. また, さらに表現 V が既約であるとき,

$$\min_M \mathcal{D}^W(M) = \min_{P:\text{pure state}} \mathrm{Tr}\, W(\hat{\theta})P \tag{3}$$

となる. ただし, $W(\hat{\theta})$ は以下で定義される.

$$W(\hat{\theta}) := \dim \mathcal{H} \int_\Theta W(\theta, \hat{\theta}) \rho_\theta \nu(\, d\theta).$$

無限次元の場合は $\dim \mathcal{H} \cdot \nu(\, d\theta)$ を $\int_\Theta \rho_\theta \nu(\, d\theta) = \mathrm{I}$ となる Θ 上の群作用不変な測度 ν に置き換える. ただし, 一般には既約表現 V に関して共変的な状態族であっても, $\mathcal{H}$ が無限次元であれば, そのような ν が存在するとは限らない.

ここで $W(\hat{\theta})$ そのものは $\hat{\theta}$ の取り方に依存するが, $W(\hat{\theta})$ の固有値は $\hat{\theta}$ の取り方に依存しないことに注意されたい. したがって (3) の右辺の値は $\hat{\theta}$ の取り方に依存しない.

7 個々の群共変的な純粋状態族

先の節で展開した群共変的モデルの一般論を, §3 で紹介した状態族に適用して, 非漸近的な枠組みでの最適解を求める. 以下に扱う例では, 全て群作用に関して不変な risk 関数を採用する限り, 最適解は変らない. さらに, その幾つかの群作用に関して不変な risk 関数の下での最適解についての誤差の値を求める. これらの状態族では §5 に見たように 1 次の漸近論に注目する限り, ほとんど差が見られない. 以下ではそれらの 2 次の漸近的な挙動に注目し, 2 次項の係数とモデルのスカラー曲率との関連を考察する.

その他,「量子相関を用いた推定」と「量子相関を用いない非適応的な推定」との比較も行う. 以下に扱う状態族では, 漸近 1 次係数を評価する限り両者の差は生じない. なお, 一般論から帰結できることは, あくまでも,「量子相関を用いた推定」と「量子相関を用いない適応的な推定」との差が漸近 1 次の係数を評価する限り生じないことである [25]. それよりもやや強い結論になっている.

7.1 spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態族と spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態族

spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態族を n 次テンソル積拡大した状態族 $\mathcal{S}_1^{\otimes n} := \{\rho^{\otimes n} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{n+1}) | \rho \in \mathcal{S}_1\}$ の推定問題を考える. この状態族は先にも述べたように spin n/2 coherent 状態族であり, 対称テンソル積空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ への $\mathrm{SU}(2)$ の表現に関して, 共変的である. このとき, 群作用に関して不変な risk 関数 $W(\rho, \hat{\rho})$ は, 量子類似度 $A(\rho, \hat{\rho})$ の関数として書ける.

定理 2 risk 関数 $W(\rho,\hat{\rho})$ が量子類似度 $A(\rho,\hat{\rho})$ の単調増加関数であれば, 以下に定義する POVM が minimax 解及び群作用不変な事前分布の下での Bayes 解になる.

$$M_n(\,d\hat{\rho}_1) := (n+1)\hat{\rho}_1^{\otimes n}\nu(\,d\hat{\rho}_1). \tag{4}$$

なお, $\hat{\rho}_1$ は推定値として得られる spin $\frac{1}{2}$ coherent 状態の密度行列を表す. また, Bayes 解であることから, M_n の許容性が確認できる.

証明については [10] を参照のこと. 以下この最適な POVM の下での個々の量を risk として用いた場合の誤差の値を記す.

$$\mathcal{D}^{A}_{\rho_1^{\otimes n}}(M_n) = \frac{4}{n+1} \cong \frac{4}{n} - \frac{4}{n^2} \tag{5}$$

$$\mathcal{D}^{d_b^2}_{\rho_1^{\otimes n}}(M_n) = \frac{2}{2n+3} \cong \frac{1}{n} - \frac{3}{2n^2} \tag{6}$$

$$\mathcal{D}^{1-F}_{\rho_1^{\otimes n}}(M_n) = 1 - \frac{n+1}{n+2} \cong \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \tag{7}$$

$$\mathcal{D}^{d_r^2}_{\rho_1^{\otimes n}}(M_n) \cong \frac{4}{n} - \frac{16}{3}\frac{1}{n^2} \tag{8}$$

$$P^{M_n}_{\rho_1^{\otimes n}}\{A(\rho_1\|\hat{\rho}_1) \geq \epsilon\} = \exp\left(-\frac{1}{4}\epsilon(n+1)\right). \tag{9}$$

参考までに最適な POVM を用いたときにできる確率分布族 $\{P^{M_n}_{\rho_1^{\otimes n}}|\rho_1 \in \mathcal{S}_1\}$ について Kullback-Leibler の divergence を計算する. $A(\rho_1\|\rho_1') = \epsilon$ であるとき,

$$\frac{1}{n}D\left(P^{M_n}_{\rho_1^{\otimes n}}\middle\|\, P^{M_n}_{\rho_1'^{\otimes n}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(1-e^{\frac{\epsilon}{4}})^i}{i} < \frac{\epsilon}{4}, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-e^{\frac{\epsilon}{4}})^i}{i} = \frac{\epsilon}{4}$$

となる.

以下,「量子相関を用いた推定」と「量子相関を用いない非適応的な推定」の比較を行う. ϵ が十分小さいとき

$$D\left(P^{M_1}_{\rho_1}\middle\|\, P^{M_1}_{\rho'_1}\right) \cong \frac{1}{4}\epsilon$$

となる. したがって $\frac{1}{4}$ は確率分布族 $\{P^{M_1}_{\rho_1}|\rho_1 \in \mathcal{S}_1\}$ の Fisher 情報量を表していると考えることができ, 各状態に最適測定 M_1 を行い, 得られたデータの MLE(最尤推定量) を推定値とし, risk 関数として $A(\rho\|\hat{\rho})$ を用いると, 誤差の n についての一次の項は 4 となり, 差が出ない. しかし, より高次の評価を行うと差が出ると思われる. なお, 他の risk 関数を用いても同様の結論が得られる.

次に裾確率の両者の差に注目する. 裾確率 $P^{M_n}_{\rho^{\otimes n}}\{A(\rho\|\hat{\rho}) \geq \epsilon\}$ の n についての減少率は $\frac{\epsilon}{4}$ となるが,「量子相関を用い無い非適応的な推定の場合」古典論における Bahadur の結果を参考

にすると, その減少率は $\log(1-e^{\frac{\epsilon}{4}}) < \frac{\epsilon}{4}$ となり, 量子相関を用いた場合よりも悪い. したがってここまで細かい議論を行うと量子相関を用いる効果が見える.

以下, 同様に,spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態族について同様の議論を行う. この状態族の n 次テンソル積拡大は spin $\frac{nj}{2}$ coherent 状態族に他ならない. したがって, 最適な POVM は (4) で与えたものである. ただし,spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態族での量子類似度,Bure の距離などを用いて誤差評価を行うことになるので, (5) ~ (9) が若干, 異なる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{A}_{\rho_j^{\otimes n}}(M_n) &= \frac{4j}{jn+1} \cong \frac{4}{n} - \frac{4}{jn^2} \\
\mathcal{D}^{d_b^2}_{\rho_j^{\otimes n}}(M_n) &= \frac{2j}{2jn+2+j} \cong \frac{1}{n} - \frac{2+j}{2j}\frac{1}{n^2} \\
\mathcal{D}^{1-F}_{\rho_j^{\otimes n}}(M_n) &= 1 - \frac{jn+1}{jn+j+1} \cong \frac{1}{n} - \frac{1+j}{j}\frac{1}{n^2} \\
\mathcal{D}^{d_r^2}_{\rho_j^{\otimes n}}(M_n) &\cong \frac{4}{n} - \frac{16}{3j}\frac{1}{n^2} \\
P^{M_n}_{\rho_j^{\otimes n}}\{A(\rho_j\|\hat{\rho}_j) \geq \epsilon\} &= \exp\left(-\frac{1}{4}\epsilon\left(n+\frac{1}{j}\right)\right).
\end{aligned}$$

なお,n 次テンソル積拡大での最適な POVM を M_n で表した.

7.2 boson coherent 状態族

boson coherent 状態族を n 次テンソル積拡大した状態族 $\mathcal{S}_\infty^{\otimes n} := \{\rho^{\otimes n} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{n+1}) | \rho \in \mathcal{S}_\infty\}$ の推定問題を考える. この状態族は先にも述べたように再び boson coherent 状態族になる. そして同様に上半 3 角行列の表現に関して, 共変的である. このとき, 群作用に関して不変な risk 関数 $W(\alpha, \hat{\alpha})$ は, 量子類似度 $A(\rho_{\infty,\alpha}, \rho_{\infty,\hat{\alpha}})$ の関数として書ける.

定理 3 risk 関数 $W(\alpha, \hat{\alpha})$ が量子類似度 $A(\rho_{\infty,\alpha}, \rho_{\infty,\hat{\alpha}})$ の単調増加関数であれば, 以下に定義する POVM が minimax 解になる.

$$M_n(\, d\hat{\alpha}) := \frac{n}{\pi}\rho_{\infty,\hat{\alpha}}^{\otimes n}\, d^2\hat{\alpha}.$$

この POVM に対応する測定はヘテロダイン測定とよばれ, 量子光学でも重要な役割を果たす.

risk 関数が $\|\alpha - \hat{\alpha}\|^2$ であるときは , Holevo[21] により示され , 一般の場合については林 [11] において示された . また, その実現についても比較的容易である [21, 4]. 以下この最適な POVM の下での個々の量を risk として用いた場合の誤差の値を記す. この最適な POVM を行ったと

きの測定値の従う確率分布は正規分布なので以下の量の計算は極めて容易である.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{A}_{\rho_\infty^{\otimes n}}(M_n) &= \frac{4}{n} \\
\mathcal{D}^{d_b^2}_{\rho_\infty^{\otimes n}}(M_n) &= \frac{2}{2n+1} \cong \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \\
\mathcal{D}^{1-F}_{\rho_\infty^{\otimes n}}(M_n) &= 1 - \frac{n}{n+1} \cong \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\
\mathcal{D}^{d_r^2}_{\rho_\infty^{\otimes n}}(M_n) &= \frac{4}{n} \\
P^{M_n}_{\rho_\infty^{\otimes n}}\{A(\rho_\infty \| \hat{\rho}_\infty) \geq \epsilon\} &= \exp\left(-\frac{1}{4}\epsilon n\right).
\end{aligned}$$

参考までに最適な POVM を用いたときにできる確率分布族 $\{P^{M_n}_{\rho_{\infty,\alpha}^{\otimes n}} | \alpha \in \mathbb{C}\}$ について Kullback-Leibler の divergence を計算する. $A(\rho_{\infty,\alpha} \| \rho_{\infty,\alpha'}) = \epsilon$ であるとき,

$$\frac{1}{n} D(P^{M_n}_{\rho_{\infty,\alpha}^{\otimes n}} \| P^{M_n}_{\rho_{\infty,\alpha'}^{\otimes n}}) = \frac{1}{4}\epsilon$$

となる. このモデルの場合は, $n = 1$ のときの最適測定 M_1 を行ったときに得られる確率分布族 $\{P^{M_n}_{\rho_{\infty,\alpha}^{\otimes n}} | \alpha \in \mathbb{C}\}$ が正規分布族になる. したがって, n 粒子系に対して, それぞれ最適測定 M_1 を行い, そのデータについて平均を取ると正規分布となり, 合成系に対する最適測定 M_n を行った場合と全く同じ確率分布になる. したがってこのモデルでは, 群共変的な risk 関数を採用する限り量子相関を用いる効果は全くない.

また,$\mathbb{C}$ がコンパクトではないのでこの群共変的な POVM M_n が Bayes 解になるような事前分布が存在するとは限らない. したがって, ここまでの議論だけでは POVM M_n の許容性は言えない. だが, M_n を固定したときの確率分布族は 2 次元の正規分布族なので, 非許容性も言えない. (もし, 3 次元以上の正規分布族であれば, 古典論の結果から直ちに非許容性が言えてしまう.)

7.3 $\mathfrak{su}(1,1) - \lambda$ coherent 状態族

$\mathfrak{su}(1,1) - \lambda$ coherent 状態族を n 次テンソル積拡大した状態族 $\mathcal{S}_\lambda^{\otimes n} := \{\rho^{\otimes n} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{n+1}) | \rho \in \mathcal{S}_\lambda\}$ の推定問題を考える. この状態族は先にも述べたように $\mathfrak{su}(1,1) - n\lambda$ coherent 状態族になる. このとき, 群作用に関して不変な risk 関数 $W(\zeta, \hat{\zeta})$ は, 量子類似度 $A(\rho_{\lambda,\zeta} \| \rho_{\lambda,\hat{\zeta}})$ の関数として書ける. このとき以下の定理を得る [18].

定理 4 risk 関数 $W(\zeta, \hat{\zeta})$ が量子類似度 $A(\rho_{\lambda,\zeta}, \rho_{\lambda,\hat{\zeta}})$ の単調増加関数であれば, 以下に定義する POVM が minimax 解になる. ただし, 以下の POVM が最適解になるのは $n\lambda > 1$ のときに限る. $n\lambda \leq 1$ のときについては以下のものは POVM にすらならない.

$$M_n(\, d\hat{\alpha}) := \frac{\lambda - 1}{\pi} \rho_{-\lambda,\hat{\zeta}}^{\otimes n} \, d^2\hat{\zeta}.$$

この POVM M_n に対応する測定を実現するための枠組みは [15] で議論されている. 以下この最適な POVM の下での個々の量を risk として用いた場合の誤差の値を記す.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{A}_{\rho_{-\lambda}^{\otimes n}}(M_n) &= \frac{4\lambda}{\lambda n - 1} \cong \frac{4}{n} + \frac{4}{\lambda n^2} \\
\mathcal{D}^{d_b^2}_{\rho_{-\lambda}^{\otimes n}}(M_n) &= \frac{2\lambda}{2\lambda n - 2 + \lambda} \cong \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{n^2} \\
\mathcal{D}^{1-F}_{\rho_{-\lambda}^{\otimes n}}(M_n) &= 1 - \frac{\lambda n - 1}{\lambda(n+1) - 1} \cong \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{n^2} \\
\mathcal{D}^{d_r^2}_{\rho_{-\lambda}^{\otimes n}}(M_n) &\cong \frac{4}{n} + \frac{16}{3\lambda}\frac{1}{n^2} \\
P^{M_n}_{\rho_{-\lambda}^{\otimes n}}\{A(\rho_{-\lambda}\|\hat{\rho}_{-\lambda}) \geq \epsilon\} &= \exp\left(-\frac{1}{4}\epsilon\left(n - \frac{1}{\lambda}\right)\right).
\end{aligned}$$

参考までに最適な POVM を用いたときにできる確率分布族 $\{P^{M_n}_{\rho_{-\lambda,\zeta}^{\otimes n}} | \zeta \in \mathbb{C}\}$ について Kullback-Leibler の divergence を計算する. $A(\rho_{-\lambda,\zeta}\|\rho_{-\lambda,\zeta'}) = \epsilon$ であるとき,

$$\frac{1}{n} D(P^{M_n}_{\rho_{-\lambda,\zeta}^{\otimes n}} \| P^{M_n}_{\rho_{-\lambda,\zeta'}^{\otimes n}}) = \frac{1}{4}\epsilon$$

となる. したがって $\frac{1}{4}$ は確率分布族 $\{P^{M_1}_{\rho_{-\lambda}} | \rho \in \mathcal{S}_{-\lambda}\}$ の Fisher 情報量を表していると考えることができ, spin $\frac{1}{2}$ のときと同様に一次の項に注目する限り「量子相関を用いる推定」と「量子相関を用いない非適応的な推定」との間には差が生じない. しかし, より高次の評価を行うと差が出ると思われる. なお, 他の risk 関数を用いても同様の結論が得られる.

次に裾確率についての両者の差に注目する. これについては Kullback-Leibler の divergence が最適解の裾確率の減少率と一致するので, spin $\frac{1}{2}$ のときと同様の結論を下すことはできない. Kullback-Leibler の divergence の他に, 類似度の注目する方法なども考えることができる. その他, boson の場合と同様に今導いた最適測定の許容性については未解決である.

7.4 2 次項とスカラー曲率の関係

先に扱った状態族での 2 次項の係数と SLD 内積の Levi-Civita 接続のスカラー曲率の関係に注目する. spin $\frac{j}{2}$ coherent 状態族, boson coherent 状態族,$\mathfrak{su}(1,1) - \lambda$ coherent 状態族の上記の意味でのスカラー曲率はそれぞれ $2/j, 0, -2/\lambda$ である. スカラー曲率と誤差との関係をまとめると以下のようになる.

状態族	スカラー曲率	誤差の $\frac{1}{n^2}$ 項の係数				$\log \mathrm{P}_{\rho^{\otimes n}}^{M_n}\{A \geq \epsilon\}$	$\frac{1}{n}$ KL divergence
		A	d_b^2	$1-F$	d_r^2		
spin $\frac{j}{2}$	$\frac{2}{j}$	$-\frac{4}{j}$	$-\frac{1}{j}-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{j}-1$	$-\frac{16}{3}\frac{1}{j}$	$-\frac{\epsilon}{4}\left(n+\frac{1}{j}\right)$	$j\sum_{i=1}^{jn}\frac{(1-e^{\frac{\epsilon}{4j}})^i}{i}$
boson	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{\epsilon}{4}n$	$\frac{\epsilon}{4}$
$\mathfrak{su}(1,1)-\lambda$	$-\frac{2}{\lambda}$	$\frac{4}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\lambda}-1$	$\frac{16}{3}\frac{1}{\lambda}$	$-\frac{\epsilon}{4}\left(n-\frac{1}{\lambda}\right)$	$\frac{\epsilon}{4}$

スカラー曲率が boson の場合との誤差の 2 次項の係数の差に比例している. なお, 比例定数が負になっていることに注意. すなわち, スカラー曲率が正であるときは 0 であるときに比べて, 誤差が小さくなっており, 逆にスカラー曲率が負であるときは誤差が悪くなっている.

同様に, 裾確率についてもスカラー曲率が大きいほど, 小さくなっている. このようなスカラー曲率と推定精度の関連は現在のところ上記のような特殊例にのみ分かっており, 一般的な関連は全く分かっていない.

また, 最後に付け加えた $\frac{1}{n}$ KL divergence であるが, 他の議論と異なり, $\mathfrak{su}(1,1)-\lambda$ coherent 状態の方が spin $\frac{j}{2}$ より良くなっており, 推定精度を反映しているとは言えない.

8 他の理論との比較検討

8.1 古典論との比較

古典論では, 高次の漸近論はバイアスを補正した上で比較する手法が主流となっている. ただし, 江口, 柳本の理論のように座標に依存しない KL-divergence を risk に取ることによって, バイアスを補正なしで, 2 次項の係数の比較をする理論も存在する. 以下では , 古典論のバイアス補正後の 2 次の漸近論 (例えば [1, 2]) を簡単に触れた後で本稿で扱った議論と比較する .

古典論では指数型分布族が曲率 0 になるような接続 (アファイン接続) を考え, アファイン接続の下での曲率が, 2 次項の係数となるという結果が得られている. この場合, 曲率が 0 でない限り, 2 次項の係数が正になり, 曲率が大きいほど 2 次項の係数が悪くなる.

本稿で論じた問題と上述の古典論の結果では, 全く逆の結論のように思える. しかし,risk が異なっている点や, バイアス補正の有無 (本稿で論じた量子の場合はそもそも座標概念を導入していないのでバイアスという概念が存在しない.) 考えている接続が異なっている点などに注意すると, 必ずしも矛盾した結論にはならない.

次に裾確率に注目して比較する. 大偏差型の評価では真値から推定値がノルムが $\delta > 0$ 以上離れる裾確率の減少率を表す指数に注目する. 古典論では, 裾確率の指数と KL-divergence の間に (弱一致性の下で) (裾確率の指数) $\leq$ KL-divergence となる関係式が成立する. しかも, 全ての点で (裾確率の指数) $=$ KL-divergence となる推定量が存在するための必要十分条件はモデルが指数型分布族であることである. 指数型でない 1 次元の場合は KL-divergence $-$(裾確率の指数) の First order (δ^4) の係数が曲率に対応する [3]. 多次元でも, 局指数型であれば, 同じように KL-divergence $-$ (裾確率の指数) の First order の係数が何らかの意味で曲率に依存すると思われる.

一方, 本稿で議論した量子状態族では, (裾確率の指数) は全て $\frac{1}{4}\epsilon$ となり, スカラー曲率の有無では変らない. 裾確率に曲率の影響が現れると思われる部分は, $-\frac{1}{n}\log \mathrm{P}_{\rho^{\otimes n}}^{M_n}\{A \geq \epsilon\} = \frac{1}{4}\epsilon(1+\frac{R}{2n})$ が $\frac{1}{4}\epsilon$ に近づく速さである. (R でスカラー曲率を表した.) このように, 裾確率に注目すると古典論の場合と全く異なった形で曲率が寄与している.

8.2 純粋状態族に対する松本理論との関連

松本 [26, 27] では純粋状態からなる状態族の $\mathcal{C}_\theta$ と Berry Phase に対応する $U(1)$-bundle の曲率との関連を調べている. 一般に 2 つ以上のパラメータを持つ量子状態族の推定では, 個々のパラメータに対して局所的に最適な測定が非可換性のために, 同時に実行することができない. したがって, 複数のパラメータを同時に推定するとき, ここのパラメータを独立に推定したとき比べて推定精度が低下する度合いが問題となる. すなわち, 異なるパラメータの同時推定の困難さが問題となる. 松本 [26, 27, 28, 29] によると, 純粋状態族の場合は 2 つ以上のパラメータ間の Berry Phase に対応する $U(1)$-bundle の曲率がその際の推定精度の低下の度合いと一致する. なお, 本稿で扱った具体例に対しては全て松本理論の適用が可能である. 例えば, 先に紹介した coherent な状態族では互いに全く同時推定不可能なパラメータの対がある . そのため , Cramér-Rao 型の下限 $\mathcal{C}_\theta$ は $\operatorname{tr} J_\theta^{-1}$ ではなく , $\operatorname{tr} 2J^{-1}$(ただし $J_\theta = 1$ の場合) となる . もし , この曲率が消えるならば純粋状態からなる状態族の場合 $\mathcal{C}_\theta = \operatorname{tr} J_\theta^{-1}$ となる .

松本理論では曲率の寄与が漸近 1 次の項に現れることに対して, 本稿で扱った問題では曲率の寄与が漸近 2 次の項に現れる点で異なっている. また, 松本理論では曲率の存在が推定精度を悪化する方向に働いているのに対し, 本稿で扱った問題では正曲率であれば推定精度を向上させる方向に働いている. しかしながら, 両者の間では注目している接続が全く異なっているので, 結論自体は全く矛盾しない.

このように同じ量子推定の枠組みの中でも, 注目する接続によって, 曲率が全く異なった仕方で推定精度に寄与することがある.

9 結論

本稿で触れたように , 量子推定における 1 次の漸近論はかなり解決に近づいており , 今後 , 非漸近的な問題や 2 次の漸近論が問題になると思われる . 一般に , パラメータ数が 2 の coherent な状態族は boson coherent 状態族に漸近することは色々な角度から確認できていた . 本稿では spin coherent 状態族及び , $\mathfrak{su}(1,1) - \lambda$ coherent 状態族が boson coherent 状態族に漸近する速さを正確に論じ , Levi-Civita 接続のスカラー曲率との関連を指摘した . なおパラメータ数が 2 の coherent な状態族で Levi-Civita 接続のスカラー曲率が一定なものは, 本稿 §3 で挙げたものに限られると予想できる. 同様に, パラメータ数が 2 の coherent な状態族である群のユニタリ表現に関して推移的なものは, §3 で挙げたものに限られると予想できる. これらについては未解決問題である.

ただ , 本稿で論じたような 2 次項の係数とスカラー接続との関連を一般に調べることは難しく , 一般の場合はかなり状況が異なると思われる . coherent かつ等曲率な状態族について同種

の関連があると思われる．その他，許容性などの非漸近的な未解決問題がたくさんあり，今後の進展が待たれる．

参考文献

[1] Amari, S., *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Lecture Notes in Statistics, Vol. 28 Springer, Berlin, 1985.

[2] Amari, S., and Nagaoka, H., Methods of Information Geometry, AMS/OUP, 2000.

[3] Fu, J. C., Large sample point estimation: A large devitation theory approach, Ann. stat., **10**, (1982), 762-771.

[4] 藤原 彰夫, 量子状態の統計的推定理論, 東京大学大学院工学研究科計数工学専攻, 修士論文, (1993).

[5] Fujiwara, A., and Nagaoka, H., Quantum Fisher metric and estimation for pure state models, Physics Letters **201A**, (1995), 119-124.

[6] Fujiwara, A., and Nagaoka, H., An estimation theoretical characterization of coherent states, Journal of Mathematical Physics **40**, (1999), 4227-4239.

[7] Hayashi, M., Asymptotics of Quantum Relative Entropy From Representation Theoretical Viewpoint, E-print http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9704040/ (1997).

[8] Hayashi, M., A Linear Programming Approach to Attainable Cramer-Rao type bound and Randomness Conditions, E-print http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9704044/.

[9] Hayashi, M., A Linear Programming Approach to Attainable Cramer-Rao type bound, Quantum Communication, Computing, and Measurement, (edited by Hirota, O., Holevo, A. S., and Caves, C. A.), Plenum, New York, 1997, 99-108.

[10] Hayashi, M., Asymptotic estimation theory for a finite-dimensional pure state model, Journal of Physics A: Math. and Gen. **31**, (1998), 4633-4655.

[11] 林正人, 量子推定理論における漸近的大偏差型評価について, 科研費シンポジウム「統計的推測理論とその情報論的側面」予稿集, 1998, 53-82.

[12] 林正人, サンプル間の量子相関を用いた状態推定, 第 7 回「非平衡系の統計物理」シンポジウム報告集, 物性研究 Vol. 73 No. 4, (2000), 680-703.

[13] Hayashi, M., Asymptotic quantum theory for the thermal states family, Quantum Communication, Computing, and Measurement 2, (edited by Kumar, P., D'ariano, G. M., and Hirota, O.), Plenum, New York, 2000, 99-104.

[14] 林正人, 量子推定における大偏差型評価, 日本数学会 2000 年度秋季総合分科会統計数学分科会講演アブストラクト (2000), 85-86.

[15] Hayashi, M., and Sakaguchi, F., Subnormal operators regarded as generalized observables and compound-system-type extension related to $\mathfrak{su}(1,1)$, Journal of Physics A: Math. and Gen. **33**, (2000), 7793-7820.

[16] 林正人, 松本啓史, 測定自由度をもつ統計モデルと量子力学, 数理解析研究所講究録 **1055**, (1998), 96-110.

[17] 林正人, 松本啓史, 量子系における統計的推測の最近の発展, 日本応用数理学会誌, 掲載予定.

[18] Hayashi, M., in preparation.

[19] Helstrom, C. W., Minimum Mean-Square Error Estimation in Quantum Statistics, Physics Letters **25A**, (1967), 101-102.

[20] Helstrom, C. W., Quantum Detection and Estimation Theory, Academic Press, New York, 1976.

[21] Holevo, A. S., Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[22] Holevo, A. S., Covariant measurements and uncertainty relations, Reports in Mathematical Physics **16**, (1979) 385-400.

[23] 小林 昭七, 接続の微分幾何とゲージ理論, (裳華房, 1989).

[24] 松本啓史, 量子状態の幾何, 東京大学大学院工学研究科計数工学専攻, 修士論文, (1995).

[25] Matsumoto, K., A new approach to the Cramer-Rao type bound of the pure state model, E-print http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9704044/ (1997).

[26] Matsumoto, K., Uhlmann's parallelism in quantum estimation theory, E-print http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9711027/ (1997).

[27] Matsumoto, K., The asymptotic efficiency of the consistent esitmator, Berry-Uhlmann's curvature, and quantum information geometry, Quantum Communication, Computing, and Measurement 2, (edited by Kumar, P., D'ariano, G. M., and Hirota, O.), Plenum, New York, 2000, 105-110.

[28] Matsumoto, K., Berry's phase in view of quantum estimation theory, and its intrinsic relation with the complex structure, E-print http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/0006076/ (2000).

[29] Matsumoto, K., A geometrical approach to quantum estimation theory, doctoral thesis, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo (1997).

[30] Nagaoka, H., On the Parameter Estimation Problem for Quantum Statistical Models, 第１２回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, (1989), 577-582.

[31] 長岡浩司, エルミート行列の同時対角化のある一般化とその量子推定理論との関係について, 日本応用数理学会論文誌, vol. 1, No. 4, (1991), 305-318.

[32] Yuen, H. P., and Lax, M., Multiple-Parameter Quantum Estimation and Measurement of Nonselfadjoint Observables, IEEE Trans. **IT-19**, (1973), 740-750.