サンプル間の量子相関を用いた状態推定

林 正人 [1]　　京都大学大学院 理学研究科 数学教室

概 要

量子系で独立な複数の同一状態が与えられたときの状態推定問題を扱う. 本稿では, 状態間の量子力学的相互作用を用いることによって, その相互作用を用いない場合と比較してどれだけ推定誤差が少なくできるか考察する.

1　はじめに

量子力学系で観測を行ったときに得られる 測定値については, 確率的にしか予言できないことは良く知られている. この測定結果 ω に関する確率分布 $P(\,d\omega)$ は, 行った測定 M と測定対象である物理系の (測定直前の) 状態 ρ に依存して $P(\,d\omega) = P(\,d\omega|\rho, M)$ のように定まる. このように, 量子力学が統計的側面を持っている以上, 量子力学の本質的理解のためには, 数理統計学と量子力学を融合させた理論体系の構築が不可欠である. また同時に, 光通信システムを始めとする量子力学に従うシステムから得られる情報の限界を追究するにもこのような理論体系は必須である.

このような問題を扱う分野は量子推定理論と呼ばれ, 対象とする物理系が量子力学に従うとき, 我々が知りうる情報の限界を統計学の立場から論ずる分野である. 具体的には真の状態があるパラメトリックな集合 (状態族) $\mathcal{S} := \{\rho_\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H})|\theta \in \Theta\}$ [2] に属することだけが分っているという想定の下で, 未知パラメータ θ の値を観測データから推定する問題を扱う. ここで, もし族 $\mathcal{S}$ とともに測定 M もあらかじめ指定されていると仮定すると, 確率分布 $P_\theta(\,d\omega) = P(\,d\omega|\rho_\theta, M)$ に従うデータ ω を見て θ を推定するという単なる確率分布のパラメータ推定の問題になってしまうのだが, 量子推定の場合には, 指定されるのは族 $\mathcal{S}$ のみであり, 測定 M については θ の推定という目的のために最も適したものを求めることが必要となる. このような研究は 1960 年代の後半に上述の光通信システムの受信過程の最適化に関連して Helstrom によって始められた [1].

本稿では, 独立かつ同一な未知状態 ρ_θ の複数 (n 個) のサンプルに対する推定問題を扱い $n \to \infty$ のときの漸近的評価を扱う. そして, サンプル間の量子相関を用いずに, 個別に各サンプルを測定した場合と, 相関を用いて複数のサンプルに対して一括測定を行った場合とを比較する. 前者を非量子相関推定 (Non-Quantum Correlation, NQC 推定) と呼び後者を量子相関推定 (Quantum Correlation, QC 推定) と呼ぶことにする. なお NQC 推定ではそれまでに得られた測定値から次のサンプルに対する測定方法を選択できるという問題設定で考える. 本稿では誤差評価の方法としておおむね平均 2 乗型の誤差評価を行う. 大偏差型の評価については [8] を参照のこと.

---

[1] e-mail address: masahito@kusm.kyoto-u.ac.jp

[2] $\mathcal{H}$ を対象となる物理系に対応するヒルベルト空間 (表現空間) とし, $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上の密度演算子の集合を表すとする.

以下, 本論文の構成について述べる. §2 では状態推定を扱う際に必要な基本的概念を導入する. §2.1 では先に定義した状態族 $\mathcal{S}$ を具体例を見ながら考えることにする. そして状態の推定には測定過程が不可欠であるが §2.2 では量子系での測定に関する定式化を与える. 次いで,§2.3 では具体例を見ながら量子系での測定について考えることにする. §2.4 では前節までの議論を踏まえて NQC 推定を定式化する. さらに §2.5 では QC 推定の定式化を与える.

§3 では本稿の主題の 1 つである NQC 推定量の漸近評価を行う. まず §3.1 では如何なる量を評価することが NQC 推定量を漸近的に評価することになるか考える. その帰結として NQC 型下限 $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ を導入する. §3.2 では先に導入した NQC 型下限を下から評価する下限として, SLD 型下限と RLD 型下限を導入する. この 2 つの下限には一長一短があり, 両者よりも優れた下限を §3.3 では導入する. また §3.4 では NQC 型下限 を上から評価する量を導入する.

次に §4 では QC 推定量の漸近的評価を行う. §3 と同じように QC 型下限 $C_\theta^{\mathrm{QC}}(G)$ を導入する. §3 での議論がかなり応用できるので, §3 に比べると §4 はかなり短縮できる.

そして §5 では前節までの議論を踏まえて, いくつかの具体例について, NQC 型下限 $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ 及び QC 型下限 $C_\theta^{\mathrm{QC}}(G)$ を計算する. まず §5.1.1 では §2.1 で導入した状態族 $\mathcal{S}_{c,N}$ について上記の議論を展開する. さらに §5.1.2 では状態族 $\mathcal{S}_c$ に対して同様の議論を展開する. そして §5.2 では量子 2 準位系について同種の議論を行う. ただしそこで述べられる (26) の証明は重要であるが省略した. そして §5.2.1 では §2.1 で導入した状態族 $\mathcal{S}_{r=r_0}$ についてさらに詳しい議論を展開する. §5.2.2 でも §2.1 で導入した状態族 $\mathcal{S}_{\phi=0}$ についても同種の議論を展開する. これらの例を通じて状態族の種類によっては量子相関を用いると, 推定誤差をかなり縮小できることを確認する.

2 問題の定式化

2.1 状態族の例

状態族の例を挙げる. Spin 1/2 系などの量子 2 準位系では状態は以下のようにパラメトライズした状態族を考えることができる.

$$\mathcal{S}(\mathbb{C}^2) = \left\{ \rho_{(x,y,z)} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x & y+zi \\ y-zi & 1-x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{I} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \le 1 \right\}.$$

同じ状態族を次のようにパラメトライズすることも考えられる.

$$\mathcal{S}(\mathbb{C}^2) = \left\{ \rho_{(r,\theta,\phi)} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r\cos\theta & r\sin\theta e^{i\phi} \\ r\sin\theta e^{-i\phi} & 1-r\cos\theta \end{pmatrix} \middle|\, 0 \le r \le 1, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \phi < \pi \right\}.$$

さらに $\mathcal{S}$ の部分状態族として以下のような状態族も考えられる. 密度演算子の固有値が既知である場合はこの状態族の推定を考えることになる.

$$\mathcal{S}_{r=r_0} := \left\{ \rho_{(r_0,\theta,\phi)} \middle|\, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \phi < \pi \right\}.$$

そのほか以下のような状態族も考えられる. $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ に対応する物理量の期待値が 0 であることのみが既知である場合の状態推定では以下の状態族の推定を考えることになる.

$$\mathcal{S}_{\phi=0} := \left\{ \rho_{(r,\theta,\phi)} \middle| \, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \ < 2\pi \right\}.$$

またコヒーレント状態に熱ノイズが加わった場合では以下の状態族を考えることになる. なお $|\alpha\rangle$ はコヒーレント状態を表すことにする.

$$\mathcal{S}_c := \left\{ \rho_{\xi,N} := \frac{1}{\pi N} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|\xi-\alpha|^2}{N}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \, d^2\alpha \middle| \, \xi \in \mathbb{C}, N \ > 0 \right\}.$$

また, ノイズの大きさ N が既知である場合は, 以下の状態族の未知パラメータ ξ を推定する問題に帰着する.

$$\mathcal{S}_{c,N} := \left\{ \rho_{\xi,N} \middle| \, \xi \in \mathbb{C} \right\}.$$

2.2 量子測定の定式化

次に NQC 測定及び QC 測定の具体的な記述に入る前に表現空間 $\mathcal{H}$ 上の量子測定について触れておく. 測定過程は図式的に書くと以下のようになる.

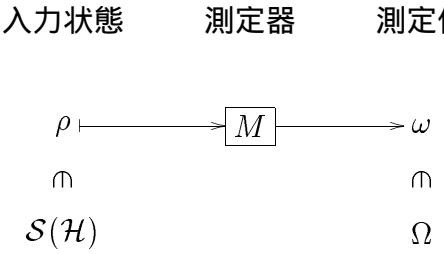

図 1

したがって, 測定値 ω の確率分布は入力状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ と測定器 M によって決定されるので P_ρ^M で表すことにする. ここで Ω を測定値が取りうる値の集合としたとき測定値が $B \subset \Omega$ に含まれる確率は $P_\rho^M(B)$ で表わされる. さらに, 確率分布 P_ρ^M に関して, 量子力学の定式化から以下の条件が要請される.

$$\begin{aligned} P^M_{\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2}(B) =& \lambda P^M_{\rho_1}(B) + (1-\lambda) P^M_{\rho_2}(B) \\ & 1 \geq \forall\lambda \geq 0, \forall\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), \text{ for any Borel } B \subset \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

量子力学の定式化では表現空間が $\mathcal{H}$ で表される物理系での量子測定は (1) を満たすもので表されるが, 逆に (1) を満たす量子測定 M が実装可能とは限らない. しかし, 本稿では定式化の単純化のため, (1) を満たす測定が全て実装可能との仮定の下で以下の議論を進めるとする.

このとき以下の定理が知られている [8].

定理 **1** 任意の (1) を満たす表現空間が $\mathcal{H}$ となる物理系の測定 M は以下に定義する POVM M' で以下のように表すとことが出来る.

$$P_\rho^M(B) = \mathrm{Tr}\,\rho M'(B), \quad \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), \text{for any Borel } B \subset \Omega.$$

なお, 正作用素値測度の定義は以下で与えれる.

定義 **2** 条件 を満たす以下の写像 M' を測定値集合として Ω を持つ $\mathcal{H}$ 上の正作用素値測度 (Positive-Operator-Valued Measure, POVM) と呼ぶことにする.

$$M : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{B}_{sa}^+(\mathcal{H}) \tag{2}$$

なお, $\mathcal{B}(\Omega)$ を Ω 上の Borel 集合族とし, $\mathcal{B}_{sa}^+(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界な非負定値な自己共役作用素の集合とする. そして (2) の写像に課される条件は以下で表される.

$$\begin{aligned} &\circ M(\emptyset) = 0, \quad M(\Omega) = \mathrm{I} \\ &\circ \sum_{i=1}^{\infty} M(B_i) = M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right). \end{aligned} \tag{3}$$

(3) の左辺では弱収束を仮定する. そして測定値集合として Ω を持つ $\mathcal{H}$ 上の POVM の集合を $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ で表すことにする.

なお, 表現空間が $\mathcal{H}$ となる量子測定を扱う際, 条件 (1) を満たす量子測定として扱うよりも, $\mathcal{H}$ 上の POVM として扱った方が理論展開が容易になる. したがって, 本稿では我々は量子測定と言えば $\mathcal{H}$ 上の POVM を表すこととする. そして一般に各 POVM を M' ではなく M で表すことにする. なお, 任意の Borel 集合 $B \subset \mathbb{R}$ に対して $M(B)$ が射影すなわち $M(B) = M(B)^2$ となる POVM のことを射影値測度 (Projection-Valued-Measure, PVM) と呼ぶことにする.

2.3 量子測定の例

次に物理的に良く知られている量子測定が先ほど導入した POVM としてどのように書き表されるか考えることにする. 例えば Spin 1/2 系などの量子 2 準位系での物理量 $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ に対する測定は以下で書き表される POVM で与えられる.

$$\emptyset \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\{\frac{1}{2}\right\} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left\{-\frac{1}{2}\right\} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

一般に物理量 (自己共役作用素) X に対応する測定は X のスペクトル分解 (すなわち以下の条件を満たす $\mathbb{R}$ に値を持つ PVM E_X) で与えられる[3].

$$\int_{\mathbb{R}} x E_X(\,dx) = X.$$

[3] X が自己共役作用素である場合はこのような PVM E_X は一意に存在する. 証明は日合・柳 [5] を参照のこと.

特に表現空間 $\mathcal{H}$ が $L^2(\mathbb{R})$ である場合は個数演算子 $\sum_{n=0}^{\infty} n|n\rangle\langle n|$ に対応する測定は個数測定と呼ばれ以下では $\mathbf{N}$ と書くことにする. なお §2.1 で与えた状態 $\rho_{\xi,0}$ に対して個数測定 $\mathbf{N}$ を行うと期待値 $|\xi|^2$ のポアソン分布が得られ, 状態 $\rho_{0,N}$ に対して同じく個数測定 $\mathbf{N}$ を行うと期待値 N の幾何分布が得られる.

今述べた測定は各 Borel 集合 $B \subset \Omega$ に対して, $M(B)$ が射影になる (射影性を満たす) ものであった. しかし, 一般には §2.2 で定義された測定は必ずしも射影性を満たすものばかりではない.

例えば PVM の凸結合で与えられる POVM は必ずしも射影性を満たすとは限らない. 以下では物理量 $X_1, \ldots, X_d$ の測定 $E_{X_1}, \ldots E_{X_d}$ の凸結合として表される POVM のことを物理量 $X_1, \ldots, X_d$ の ランダム測定 と呼ぶことにする.

しかし, ランダム測定以外にも以下に述べるヘテロダイン測定のように射影性を満たさない測定で重要なものも数多く有る.

ここで紹介する Naĭmark の拡張定理は一般の POVM が PVM から構成することが出来ることを示している. 証明は [4, 5] を参照のこと.

補題 3 任意の POVM $M \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H})$ に対して, 以下の条件を満たす ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_0$ と $\mathcal{H}_0$ 上の密度演算子 ρ_0 と PVM $E \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0)$ が取れる.

$$\mathrm{Tr}\, \rho M(B) = \mathrm{Tr}\, \rho \otimes \rho_0 E(B), \quad \text{for any Borel } B \subset \Omega, \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}).$$

3 つ組 $(\mathcal{H}_0, \rho_0, E)$ のことを M の Naĭmark 拡張と呼ぶことにする.

表現空間 $\mathcal{H}$ が $L^2(\mathbb{R})$ である場合で, 以下の $\mathbb{C}$ に値を持つ POVM $\mathbf{H}$ で与えられる測定がヘテロダイン測定として知られている.

$$\mathbf{H}(B) := \frac{1}{\pi} \int_B |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha.$$

なお §2.1 で与えた状態 $\rho_{\xi,N}$ に対してヘテロダイン測定 $\mathbf{H}$ を行うと期待値 ξ, 分散 $N+1$ の $\mathbb{C}$ 上のガウス分布が得られる. このヘテロダイン測定 $\mathbf{H}$ の Naĭmark 拡張は $(L^2(\mathbb{R}), |0\rangle\langle 0|, E_{\tilde{P},\tilde{Q}})$ で与えられる. なお $E_{\tilde{P},\tilde{Q}}$ は $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ 上の 2 つの物理量 $\tilde{P} := P \otimes \mathrm{I}_0 + \mathrm{I} \otimes P_0, \tilde{Q} := Q \otimes \mathrm{I}_0 - \mathrm{I} \otimes Q_0$ の同時スペクトル分解を表すことする.($\tilde{P}, \tilde{Q}$ は可換であるので同時スペクトル分解が存在する.) ヘテロダイン測定 $\mathbf{H}$ はハーフミラーを用いて以下のよう実験すれば可能である.

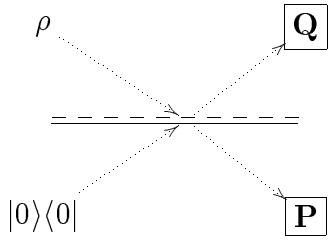

図 2

$\boxed{\mathbf{P}}$ は物理量 P を $\boxed{\mathbf{Q}}$ は物理量 Q を測定する測定器を表す. 図 2 では Naĭmark 拡張の ρ_0 として, コヒーレント状態 $|0\rangle\langle 0|$ を用いたわけであるが, さらに ρ_0 としてコヒーレント状態ではなくスクイズド状態を用いることも可能である. そのようにして構成される POVM のことを スクイズド状態を用いたヘテロダイン測定 と呼ぶことにする.

2.4 NQC 推定の定式化

先にも述べたように本稿では NQC 推定と QC 推定の 2 つの場合に別けて推定誤差を評価することが目的であった. そのために, 以下では NQC 推定及び QC 推定の両者の問題設定を数学的に定式化することにする.

NQC 推定では各単一のサンプルに対する測定のみ可能とする. ただし, k 番目のサンプルに対する測定はそれまでに得られた $k-1$ 個の観測値から決定することが可能であるとする. なお, 異なる測定から得られた測定値は別の測定値と見なすことにする. そしてつぎの段階は得られた n 個の測定値からパラメータの推定値を与える関数を構成することになる. n 個のサンプルが準備されたとの仮定の下では $k-1$ 個の測定値 $\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}$ から k 番目の測定 $M_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})$ を与える関数の列 $\mathcal{E}_n := \{M_k\}_{k=1}^n$ と, n 個の測定値 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ から推定値 $T_n(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ を与える関数 T_n の双方を最適化することが要求される. なお, 最適化の対象となる $(\mathcal{E}_n, T_n)$ のことを NQC 推定量 と呼ぶことにする. NQC 推定を図式的に書くと以下のようになる.

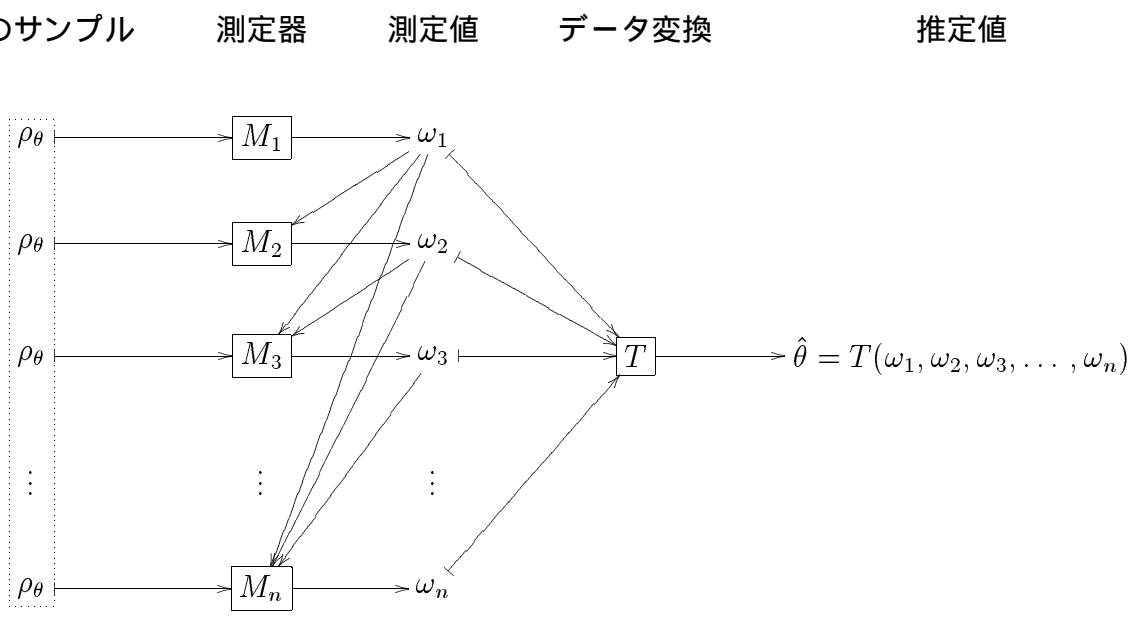

図 3

2.5 QC 推定の定式化

一方 QC 推定では, 同一な未知状態の ρ_θ が n 個, 独立に準備されるとの仮定の上で考える. そして, 量子状態 ρ_θ の n 個のサンプルが独立に準備された状態を $\rho_\theta^{\otimes n} := \underbrace{\rho_\theta \otimes \cdots \otimes \rho_\theta}_{n}$ で表されると仮定して議論を進める[4]. ここで n 個のサンプルからなる物理系の表現空間は $\mathcal{H}^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n}$ で表されるとする. したがって我々が取り得る選択肢は表現空間 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の量子測定 M^n の最適化と測定値から推定値を与える関数 T_n の最適化の 2 段階に分けられる. しかし, 測定値集合を推定値からなる集合となる POVM を考えると, 2 つの最適化プロセスは統合できる. すなわち, (M^n, T_n) の組の代りに $M^n \circ (T_n)^{-1} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{H}^{\otimes n})$ を考えるわけである. したがって, 最適化の対象となるのは $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の推定値の集合 (この場合は $\mathbb{R}^d$) を測定値集合として持つ POVM M となる. 以下では $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{H}^{\otimes n})$ の元 M^n のことを <u>QC 推定量</u> と呼ぶことにする. また §2.4 で定式化した NQC 推定量は QC 推定量に含まれる. 例えば NQC 推定量 $(\mathcal{E}_n := \{M_k\}_{k=1}^n, T_n)$ は以下に定義する QC 推定量 $M(\mathcal{E}_n, T_n)$ として表される.

$$M(\mathcal{E}_n, T_n)(B) := \int_{T_n^{-1}(B)} \bigotimes_{k=1}^{n} M_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})(\, d\omega_k), \ \forall B \subset \mathbb{R}^d \text{ on } \mathcal{H}^{\otimes n}.$$

QC 推定を図式的に書くと以下のようになる.

n 個のサンプル　　テンソル状態　　(一括) 測定器　　測定値=推定値

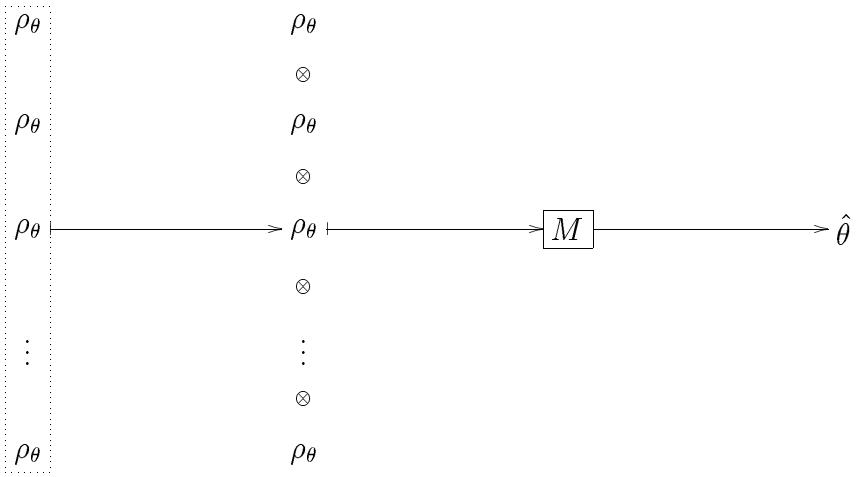

図 4

3 NQC 推定量の漸近的評価

以下では NQC 推定量について考察する.

[4]ここで, Bose 統計や Fermi 統計を考慮した定式化も考えられる

3.1 NQC 型下限 $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ の導入

θ での NQC 推定量 $(\mathcal{E}_n, T_n)$ の平均 2 乗型誤差 $V_\theta(\mathcal{E}_n, T_n)$ は以下の $d \times d$ の実対称行列とする.

$$V_\theta^{i,j}(\mathcal{E}_n, T) := \underbrace{\int \cdots \int}_{n} \left(T_n^i(\omega_1, \cdots, \omega_n) - \theta^i\right) \left(T_n^j(\omega_1, \cdots, \omega_n) - \theta^j\right) P_\theta^{\mathcal{E}_n}(\, d\omega_1, \ldots, \, d\omega_n). \quad (4)$$

ただし $P_\theta^{\mathcal{E}_n}(\, d\omega_1, \ldots, \, d\omega_n)$ は以下で定義される確率測度とする.

$$P_\theta^{\mathcal{E}_n}(\, d\omega_1, \ldots, \, d\omega_n) := \mathrm{Tr}\, \rho_\theta M_1(\, d\omega_1) \cdots \mathrm{Tr}\, \rho_\theta M_n(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})(\, d\omega_n).$$

以下では推定量の漸近的な誤差評価を行う. このためには単独の推定量 $(\mathcal{E}_n, T_n)$ ではなく, 推定量の系列 $\mathcal{E} := \{(\mathcal{E}_n, T_n)\}_{n=1}^\infty$ について考える必要がある. 以下, しばらくは問題の単純化のため, 未知パラメータが 1 つの場合に限って話を進める. すなわち (4) で定義される量が単なる実数である場合について考える. まず, 推定量の系列 $\mathcal{E}$ を漸近的に評価する方法として, 単純に考えられる 1 つの方法として以下に定義する量の評価が考えられる.

$$V_\theta(\mathcal{E}) := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, nV_\theta(\mathcal{E}_n, T_n). \quad (5)$$

しかし, 常に推定値として θ_0 を与える推定量を考えると, $\theta = \theta_0$ のときは $V_\theta(\mathcal{E})$ は 0 となるが, このような推定量は全く意味がない. 単純に $V_\theta(\mathcal{E})$ だけの最適化ではこのような弊害がある. 従って, このような弊害を避けるため以下に定義する量の最適化を考える.

$$\overline{V}_{\theta_0}(\mathcal{E}) := \overline{\lim_{\theta\to\theta_0}}\, V_\theta(\mathcal{E}). \quad (6)$$

確かに $\overline{V}_{\theta_0}(\mathcal{E})$ については, 先ほどのような推定量について 0 になるということは起らない.

しかし, パラメータ数が複数あるときを考えると (5) 及び (6) の右辺は定義されない. その場合は,

$$V_{\theta_0}(\mathcal{E}) := \lim_{\theta\to\theta_0} \lim_{n\to\infty}\, nV_\theta(\mathcal{E}_n, T_n). \quad (7)$$

が収束すると仮定し $V_{\theta_0}(\mathcal{E})$ を評価の基準とすることが考えられる.

しかし,$V_{\theta_0}(\mathcal{E})$ を評価するといっても, $d \times d$ 対称行列全体は全順序集合ではないのでそのままでは評価は困難である. 例えば,1 番目のパラメータに対してのみ多くの情報を与え, 他のパラメータにはほとんど情報を与えない測定も考えられる. 逆に 2 番目のパラメータに対しては良い精度で推定できるが, 1 番目のパラメータに対しては全く情報を与えない推定量も考えられる. しかも, このような 2 つの推定量に対しては $d \times d$ 対称行列全体で定義される順序

($A \geq B \iff A - B$ が非負定値行列) では優劣の判断は出来ない. そのような状況に対応するため, 何らかの形で $V_{\theta_0}(\mathcal{E})$ を全順序集合 (例えば実数全体) に写してその上で評価を行う必要がある. その方法として適当な重み行列 G (G は $d \times d$ の正定値対称行列) を用いて以下の量 $C_{\theta_0}(G, \mathcal{E})$ を定義し, $C_{\theta_0}(G, \mathcal{E})$ の最小化を考える[5]. (この量の定義については (7) の収束は仮定

[5]本稿では tr でパラメータに関する trace を表し, Tr でヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に関する trace を表すことにする.

しなくともよい.)

$$C_{\theta_0}(G,\mathcal{E}) := \overline{\lim_{\theta\to\theta_0}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n \operatorname{tr} G V_\theta(\mathcal{E}_n, T_n).$$

したがって以下では次に定義する NQC 型下限$C_{\theta_0}^{\mathrm{NQC}}(G)$ について考えることにする.

$$C_{\theta_0}^{\mathrm{NQC}}(G) := \inf\{C_{\theta_0}(G,\mathcal{E}) | \mathcal{E} \text{ は NQC 推定量の系列 }\}.$$

なお古典的な場合すなわち状態族 $\mathcal{S}$ の全ての元が互いに可換である場合は, 後に定義する SLD-Fisher 情報行列 J_θ の逆行列で $V_\theta(\mathcal{E})$ が下から評価でき, しかも, 最尤推定量と呼ばれる推定量の系列でその下限が達成される. この場合, 各パラメータに対して最適な測定が共通に取れるので, 各パラメータに対して同時に最適な推定量が構成できることになる. しかしながら, 一般に量子系では各パラメータに対応する最適な測定が互いに非可換であるため上記のように $V_\theta(\mathcal{E})$ に適当な重み行列を掛けて trace をとったものを最小化する戦略が取られる.

また先ほど定義した $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ に関して以下の補題が成立する.

補題 4 NQC 型下限 $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ について以下の式が成立する.

$$\begin{aligned} C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G) &= \inf\left\{ \operatorname{tr} G \left(J_\theta^M\right)^{-1} \middle| M \text{ は } \mathcal{H} \text{ 上の POVM } \right\} \\ &= \inf\{\operatorname{tr} G V_\theta(M) | M \text{ は } \theta \text{ での任意の局所不偏推定量 }\}. \end{aligned} \tag{8}$$

証明は §A を参照のこと. なお $J_{\theta_0}^M$ は確率分布族 $\{\operatorname{Tr}\rho_\theta M(\quad) | \theta\in\Theta\}$ の $\theta=\theta_0$ での Fisher 情報行列を表す. そして $\mathbb{R}^d$ を測定値集合にもつ POVM $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{H})$ で以下の条件を満たすものを $\theta=\theta_0$ での局所不偏推定量 と呼ぶことにする.

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^i \operatorname{Tr}\rho_{\theta_0} M(\,dx) = \theta^i, \quad \int_{\mathbb{R}^d} x^i \operatorname{Tr} \left.\frac{\partial\rho_\theta}{\partial\theta^j}\right|_{\theta=\theta_0} M(\,dx) = \delta^i_j.$$

$C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ については, 適当な正則条件のもとで以下の定理が成立することが知られている [6].

定理 5 以下の等式を満たす NQC 推定量の系列 $\mathcal{E} := \{\mathcal{E}_n, T_n\}_{n=1}^\infty$ が取れる.

$$C_\theta(G,\mathcal{E}) = C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G), \quad \forall\theta\in\Theta.$$

3.2 SLD 型下限 $C_\theta^S(G)$ と RLD 型下限 $C_\theta^R(G)$

次に問題となることは $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ の計算であるが, $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ の評価に関して以下の 2 つの定理を得る.

定理 6 (10) で定義される SLD-Fisher 情報行列 J_θ を用いると, 以下の評価式を得る. M を θ での局所不偏推定量としたとき, 以下の不等式が成立する.

$$V_\theta(M) \geq (J_\theta)^{-1}. \tag{9}$$

そして $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ について以下の不等式を得る.

$$C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G) \geq C_\theta^S(G) := \operatorname{tr} G(J_\theta)^{-1}.$$

なお,SLD-Fisher 情報行列 J_θ 及び対称対数微分 (SLD) L_θ は以下で定義される.

$$J_{\theta;i,j} := \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr} L_{\theta;i}\rho_\theta L_{\theta;j} + L_{\theta;j}\rho_\theta L_{\theta;i}\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta^i} = \frac{1}{2}\left(L_{\theta;i}\rho_\theta + \rho_\theta L_{\theta;i}\right). \tag{11}$$

ここで, 対称対数微分 (SLD) L_θ は (11) を満たす自己共役作用素として定義される[6]. なお, ρ_θ が退化しているときは一般には (11) を満たす自己共役作用素 L_θ 一意には存在しない. しかし, L_θ の取り方に任意性が有っても, $J_{\theta;i,j}$ は一意に定まる.

証明　$M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{H})$ を任意の局所不偏推定量とする. このとき, 任意のベクトル $a = (a_1, \ldots, a_d), b = (b^1, \ldots, b^d)$ をとる. そして $X_M^i := \int_{\mathbb{R}^d} x^i M(\,dx)$ とおく. このとき,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^d a_i x^i - \sum_{i=1}^d a_i X_M^i\right) M(\,dx) \left(\sum_{i=1}^d a_i x^i - \sum_{i=1}^d a_i X_M^i\right) \geq 0$$

より,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^d a_i x^i\right)^2 M(\,dx) \geq \left(\sum_{i=1}^d a_i X_M^i\right)^2 \tag{12}$$

を得る. そしてシュワルツの不等式と局所不偏性条件を用いると以下の式変形を得る.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^d a_i X_M^i\right)^2 \rho_\theta\right) \cdot \operatorname{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^d b^i L_i\right)^2 \rho_\theta\right) \\
&\geq \left(\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^d a_i X_M^i\right)\left(\sum_{i=1}^d b^i L_i\right) + \left(\sum_{i=1}^d b^i L_i\right)\left(\sum_{i=1}^d a_i X_M^i\right)\right)\rho_\theta\right)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^d a_i b^i\right)^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

従って (12) 及び (13) より, 以下を得る.

$$a^* V_\theta(M) a \cdot b^* J_\theta b = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^d a_i x^i\right)^2 \cdot \operatorname{Tr} \rho_\theta M(\,dx)\right) \operatorname{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^d b^i L_i\right)^2 \rho_\theta\right) \geq \left(\sum_{i=1}^d a_i b^i\right)^2.$$

[6]ただし (11) を満たす自己共役作用素は一般に存在するとは限らない, 以下では存在するとの仮定の下で議論を進める.

ここで $b := J_\theta^{-1}a$ とすると,

$$a^*V_\theta(M)a \cdot a^*J_\theta^{-1}a \geq \left(a^*J_\theta^{-1}a\right)^2,$$

すなわち,

$$a^*V_\theta(M)a \geq a^*J_\theta^{-1}a$$

を得る. 従って (9) を得た. □
同様に以下の定理を得る.

定理 7 ρ_θ が非退化のとき, (15) で定義される RLD-Fisher 情報行列 $\tilde{J}_\theta$ を用いると, 以下の評価式を得る. M を局所不偏推定量としたとき, 以下の不等式が成立する.

$$V_\theta(M) \geq (\tilde{J}_\theta)^{-1}. \tag{14}$$

そして $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ について以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned} C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G) \geq C_\theta^R(G) :=& \inf\left\{ \operatorname{tr} GV \,\middle|\, V : \text{ 実対称行列で }, V \geq (\tilde{J}_\theta)^{-1}. \right\} \\ =& \operatorname{Tr} G \operatorname{Re}(\tilde{J}_\theta)^{-1} + \operatorname{Tr}\left|\sqrt{G}\operatorname{Im}(\tilde{J}_\theta)^{-1}\sqrt{G}\right|. \end{aligned}$$

なお RLD-Fisher 情報行列 $\tilde{J}_\theta$ 及び対称対数微分 (RLD) $\tilde{L}_\theta$ は以下で定義される.

$$J_{\theta;i,j} := \operatorname{Tr}\left(\tilde{L}_{\theta;i}\right)^* \rho_\theta \tilde{L}_{\theta;j} \tag{15}$$

$$\tilde{L}_{\theta;i} := \rho_\theta^{-1}\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta^i} \tag{16}$$

なおここでは (16) で定義した $\tilde{L}_{\theta;i}$ について $\operatorname{Tr}\left(\tilde{L}_{\theta;i}\right)^* \rho_\theta \tilde{L}_{\theta;i} < \infty$ との仮定をおくことにする.

証明　(14) の証明は (9) の証明とほぼ同じようにして出来るが考えている内積の形が異なるので若干の変更が必要である. X_M は (9) の証明と同じように定義すればよいが, a, b については任意の複素ベクトルとする. そして (12) に対応する部分は以下のように書き直される.

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{i=1}^d a_i x^i - \sum_{i=1}^d a_i X_M^i\right) M(\,dx)\left(\sum_{i=1}^d \overline{a_i} x^i - \sum_{i=1}^d \overline{a_i} X_M^i\right) \geq 0$$

より,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{i=1}^d a_i x^i\right)\left(\sum_{i=1}^d \overline{a_i} x^i\right) M(\,dx) \geq \left(\sum_{i=1}^d a_i X_M^i\right)\left(\sum_{i=1}^d \overline{a_i} X_M^i\right) \tag{17}$$

を得る. そして (13) と同様にして, シュワルツの不等式と局所不偏性条件を用いると以下の式変形を得る.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{d}\overline{a_i}X_M^i\right)\rho_\theta\left(\sum_{i=1}^{d}a_iX_M^i\right)\right)\cdot\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{d}\overline{b^i}L_i\right)\rho_\theta\left(\sum_{i=1}^{d}b^iL_i\right)\right)\\
\geq&\left(\mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{d}\overline{a_i}X_M^i\right)\rho_\theta\left(\sum_{i=1}^{d}b^iL_i\right)\right)^2\\
=&\left(\sum_{i=1}^{d}\overline{a_i}b^i\right)^2. \qquad (18)
\end{aligned}$$

以下は先ほどと全く同様の議論を繰り返すことにより (14) を得る. □

ρ_θ 及び各 $\frac{\partial\rho_\theta}{\partial\theta^i}\big|_{\theta=\theta_0}$ $(i=1,\ldots,d)$ が互いに可換であるときは SLD-Fisher 情報行列 J_θ と RLD-Fisher 情報行列 $\tilde{J}_\theta$ は互いに一致するが, 一般には両者は一致しない.

次に以下で作用素のなす空間 L_ρ^2 を定義する.

$L_\rho^2 := \{X|X$ は必ずしも有界とは限らない $\mathcal{H}$ 上の線形作用素で $\mathrm{Tr}\,X^*\rho X < \infty$ となるもの.$\}$

この定義の下で L_ρ^2 から L_ρ^2 への線形写像 $\mathcal{D}$ を以下の条件を満たすものものとして定義する.

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{D}(X)\rho+\rho\mathcal{D}(X)\right)=[X,\rho].$$

このとき以下の定理を得る [3].

定理 8 $L_{\theta;1},\ldots,L_{\theta;d}$ で張られる $L_{\rho_\theta}^2$ の線形部分空間 $T_{\rho_\theta}^*$ が先に定義した作用素 $\mathcal{D}$ の作用に関して閉じているとき, ($\mathcal{D}$ 不変であるとき)$C_\theta^R(G)\geq C_\theta^S(G)$ を得る.

3.3 RLD 型下限 $C_\theta^R(G)$ と SLD 型下限 $C_\theta^R(G)$ の統一

しかし, 定理 8 の条件を満たさない場合については 2 つの下限 $C_\theta^R(G), C_\theta^S(G)$ には一長一短が有り必ずしも片方が良いとは言えない. そこで両者を統一するために以下の量を考える. まず線形空間 $\mathrm{Inv}_{\mathcal{D}}(T_{\rho_\theta}^*):=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}^n(T_{\rho_\theta}^*)\subset L_{\rho_\theta}^2$ を考える. この空間は $T_{\rho_\theta}^*$ を含む $\mathcal{D}$ の作用に関して不変な $L_{\rho_\theta}^2$ の部分空間の中で最小なものとなる. 以下では $\mathrm{Inv}_{\mathcal{D}}(T_{\rho_\theta}^*)$ の次元が有限であるとの仮定の下で議論を進める. そして $\mathrm{Inv}_{\mathcal{D}}(T_{\rho_\theta}^*)$ の基底 $\tilde{L}_1,\ldots\tilde{L}_e$ を取る. ここで L_1 から L_d は $\tilde{L}_{\theta;1},\ldots,\tilde{L}_{\theta;d}$ と一致し, なおかつ $\rho_\theta\tilde{L}_i$ は自己共役作用素とする. そして以下のように $\tilde{J}_\theta^I$ を定義する

$$\tilde{J}_{\theta;i,j}^I:=\mathrm{Tr}\left(\tilde{L}_i\right)^*\rho_\theta\tilde{L}_j.$$

以下では行列 $\tilde{J}_{\theta;i,j}^I$ のことを最小 $\mathcal{D}$ 不変 RLD-Fisher 行列と呼ぶことにする. このとき以下のことが示せる. 任意の測定 $M\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^d,\mathcal{H})$ に対して $J_\theta^{M,I}$ を以下のように定義する.

$$J_{\theta;i,j}^{M,I}:=\int_{\mathbb{R}^d}l_i^M(x)l_j^M(x)\,\mathrm{Tr}\,\rho_\theta M(\,dx).$$

$l_i^M(x)$ は $\mathrm{Tr}\,\rho_\theta\tilde{L}_iM(\,dx)$ の確率測度 $\mathrm{Tr}\,\rho_\theta M(\,dx)$ に関する Radon-Nikodym 微分とする.

補題 **9** このとき以下の式を得る.

$$\tilde{J}_\theta^I \geq J_\theta^{M,I}. \tag{19}$$

証明　ここで確率変数 $X^i(x) := \sum_{j=1}^e \left(J_\theta^{M,I}\right)^{-1}_{i,j} l_j^M(x)$ を定義する. すると,

$$\int_{\mathbb{R}^d} X^i(x)X^j(x) \operatorname{Tr} \rho_\theta M(\,dx) = \left(J_\theta^{M,I}\right)^{-1;i,j} \tag{20}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} X^i(x) l_j^M(x) \operatorname{Tr} \rho_\theta M(\,dx) = \delta_j^i \tag{21}$$

となる. ここで定理 7 の証明と同様にして (21) より,

$$\left[\int_{\mathbb{R}^d} X^i(x)X^j(x) \operatorname{Tr} \rho_\theta M(\,dx)\right] \geq \left[\left(\tilde{J}_\theta^I\right)^{-1;i,j}\right] \tag{22}$$

を得る. 従って (20) 及び (22) より (19) を得る. □

したがって, 以下の不等式を得る.

$$C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G) \geq C_\theta^H(G) := \inf\left\{\operatorname{tr} G(PJP)^{-1} \middle| J : e \times e \text{ 実対称行列で } \tilde{J}_\theta^I \geq J\right\}.$$

なお P は $\mathrm{Inv}_{\mathcal{D}}(T^*_{\rho_\theta})$ から $T^*_{\rho_\theta}$) への射影とする. ここで与えられた下限 $C_\theta^H(G)$ は $C_\theta^S(G)$, $C_\theta^R(G)$ より優れた下限を与えていることが確かめられる.

3.4 NQC 型下限 $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ の上限

次に $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ の上限を求める. 補題 4 により $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ は (8) で与えられるが, (8) での M に課す条件をもう少し強くして, 以下の量を考える[7] .

$$C_\theta^U(G) := \inf\left\{\operatorname{tr} GV_\theta(M) \middle| \begin{array}{l} M \text{ は } \theta \text{ での任意の局所不偏推定量でかつ対称対数微分の} \\ \text{線形和で表される複数の物理量のランダム測定となっている.} \end{array}\right\}.$$

Hayashi[7] によると $C_\theta^U(G)$ は以下のように計算できる.

$$C_\theta^U(G) = \left(\operatorname{tr}\sqrt{\sqrt{J_\theta}^{-1} G \sqrt{J_\theta}^{-1}}\right)^2.$$

さらに $C_\theta^U(G) \geq C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ となるが, ここで等号成立するための必要十分条件は以下で与えられる [7].

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^d a^j L_{\theta;j}\right)\rho_\theta\left(\sum_{j=1}^d a^j L_{\theta;j}\right)}{\sum_{j=1}^d\sum_{i=1}^d a^i a^j J_{\theta;i,j}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^d b^j L_{\theta;j}\right)\rho_\theta\left(\sum_{j=1}^d b^j L_{\theta;j}\right)}{\sum_{j=1}^d\sum_{i=1}^d b^i b^j J_{\theta;i,j}} \tag{23}$$
$$\forall a = (a^1, \ldots a^d), \forall b = (b^1, \ldots b^d) \in \mathbb{R}^d.$$

[7] ランダム測定の定義については §2.3 を参照のこと.

4 QC推定量の漸近的評価

次に QC 推定量の漸近的性質について評価する. n 個のサンプルに対する推定量 $M^n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{H}^{\otimes n})$ の平均 2 乗型誤差 $V_\theta(M^n)$ は (4) と同じように以下の $d \times d$ の実対称行列で与えられる.

$$V_\theta^{i,j}(M^n) := \int_{\mathbb{R}^d} \left(\hat{\theta}^i - \theta^i\right)\left(\hat{\theta}^j - \theta^j\right) \mathrm{Tr}\, \rho_\theta M(\, d\hat{\theta}).$$

さらに §3.1 と同じように, 以下では推定量の系列 $\mathcal{F} := \{M^{n_k}\}_{k=1}^\infty$ の漸近的評価を行う. なお M^{n_k} は n_k 個のサンプルからなる系, すなわち $\mathcal{H}^{\otimes n_k}$ 上の測定とする. (言い換えると M^{n_k} は $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d, \mathcal{H}^{\otimes n_k})$ の要素となる.) そして前節と同じような理由から QC 型下限 $C_\theta^{\mathrm{QC}}(G)$ を以下のように定義する.

$$C_\theta^{\mathrm{QC}}(G) := \inf\left\{ C_\theta(G, \mathcal{F}) := \varlimsup_{\theta\to\theta_0} \varlimsup_{k\to\infty} n_k \,\mathrm{tr}\, G V_\theta\left(M^{n_k}\right) \,\middle|\, \mathcal{F} \text{ は QC 推定量の系列} \right\}.$$

そして $C_\theta^{\mathrm{QC}}(G)$ について以下の補題が成立する.

補題 10 以下の等式が成立する.

$$C_\theta^{\mathrm{QC}}(G) = \varliminf_{n\to\infty} n C_\theta^{\mathrm{NQC},\otimes n}(G).$$

ただし $C_\theta^{\mathrm{NQC},\otimes n}(G)$ は状態族 $\{\rho_\theta^{\otimes n} | \theta \in \Theta\}$ の NQC 型下限とする.

証明は補題 4 と同様にすると良い. この $C_\theta^{\mathrm{QC}}(G)$ については定理 5 と同様にして, 適当な正則条件のもとで以下の定理が成立することが知られている [6].

定理 11 以下の等式を満たす QC 推定量の系列の列 $\mathcal{F}_m := \{M_m^{n_k}\}_{K=1}^\infty$ が取れる.

$$\lim_{m\to\infty} C_\theta(G, \mathcal{F}_m) = C_\theta^{\mathrm{QC}}(G), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

なお 状態族 $\{\rho_\theta^{\otimes n} | \theta \in \Theta\}$ の SLD-Fisher 情報行列を $J_\theta^{\otimes n}$, RLD-Fisher 情報行列を $\tilde{J}_\theta^{\otimes n}$ とすると, 以下の等式を得る.

$$J_\theta^{\otimes n} = n J_\theta^{\otimes 1}, \quad \tilde{J}_\theta^{\otimes n} = n \tilde{J}_\theta^{\otimes 1}. \tag{24}$$

従って, 定理 6, 定理 7, 補題 10 及び (24) を用いると, 以下の不等式を得る.

$$C_\theta^{\mathrm{QC}} \geq C_\theta^S(G), \quad C_\theta^{\mathrm{QC}} \geq C_\theta^R(G).$$

さらに状態族 $\{\rho_\theta^{\otimes n} | \theta \in \Theta\}$ の最小 $\mathcal{D}$ 不変 RLD-Fisher 行列を $\tilde{J}_\theta^{I,\otimes n}$ と書くと,

$$\tilde{J}_\theta^{I,\otimes n} = n \tilde{J}_\theta^{I,\otimes 1}$$

となることから以下を得る.

$$C_\theta^{\mathrm{QC}}(G) \geq C_\theta^H(G).$$

5　例と計算

この節では今まで展開されてきた理論を用いて§2.1で与えられた状態族について$C_\theta^{\mathrm{QC}}(G)$,$C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$を計算する.

5.1　熱ノイズが入ったコヒーレント状態族

5.1.1　部分状態族 $\mathcal{S}_{c,N}$

まず始めにノイズの大きさが既知である場合のコヒーレント状態の推定問題, すなわち状態族 $\mathcal{S}_{c,N} := \{\rho_{\theta^1+\theta^2 i,N}|\theta \in \mathbb{R}^2\}$ の推定問題を考える. この場合 $\mathcal{D}$ 不変となり, $C_\theta^R(G) = 2\left(N+\frac{1}{2}\right)g_1 + \sqrt{g_1^2-g_2^2-g_3^2}$ となる [2, 3]. ただし G を $G = \begin{pmatrix} g_1+g_2 & g_3 \\ g_3 & g_1-g_2 \end{pmatrix}$ とパラメトライズした.

さらにヘテロダイン測定 $\mathbf{H}$ を用いたときの 2 乗誤差は $V_\theta(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} N+1 & 0 \\ 0 & N+1 \end{pmatrix}$ で与えられ, $C_\theta^R(\mathrm{I}) = \mathrm{tr}\, V_\theta(\mathbf{H})$ となり, $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(\mathrm{I}) = C_\theta^R(\mathrm{I})$ を得る.

さらに一般の重み行列 G についてはスクイズド状態を用いたヘテロダイン測定[8]を用いることにより, $C_\theta^R(G)$ は達成される. 従って, 一般の $G > 0$ について $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G) = C_\theta^{\mathrm{QC}}(G) = C_\theta^R(G)$ となる. この式は, 量子相関を用いても推定精度が上がらないことを示している.

5.1.2　状態族 $\mathcal{S}_c$

次にノイズの大きさも未知である場合のコヒーレント状態の推定問題, すなわち状態族 $\mathcal{S}_c := \{\rho_{\theta^1+\theta^2 i,\theta^3}|\theta \in \mathbb{R}^3\}$ の推定問題を考える. この場合についても $\mathcal{D}$ 不変となり, $C_\theta^R(G) = 2\left(N+\frac{1}{2}\right)g_1 + \sqrt{g_1^2-g_2^2-g_3^2} + N(N+1)g_0$ となる. ただし G を $G = \begin{pmatrix} g_1+g_2 & g_3 & 0 \\ g_3 & g_1-g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 \end{pmatrix}$ とパラメトライズした. さらにこのとき [10] での議論を用いると, $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G) > C_\theta^R(G)$ となることが示せる. (証明略) また, このときサンプル間の量子相関をうまく利用すると $C_\theta^R(G)$ を達成する QC 推定量が構成できる. 例えば, 以下のように $\rho_{\xi,N}^{\otimes n}$ を測定すれば良い. まず $\rho_{\xi,N}^{\otimes n}$ にサンプル同士をうまく相互作用させて, 以下のように時間発展させると良い.

$$\rho_{\xi,N}^{\otimes n} \mapsto \rho_{\sqrt{n}\zeta,N} \otimes \rho_{0,N}^{\otimes n-1}.$$

そして,1 番目のサンプルに対してはヘテロダイン測定 $\mathbf{H}$ を行いその測定値をそのまま ξ の推定値とし, 残りの $n-1$ 個のサンプルに対しては個数測定 $\mathbf{N}$ を行い平均値を N の推定値とすれば良い.

例えば $n = 4$ のときについては次の図 5 のようにハーフミラーを組み合わせた測定を行えばよい.

[8] スクイズド状態を用いたヘテロダイン測定の定義については §2.3 を参照のこと.

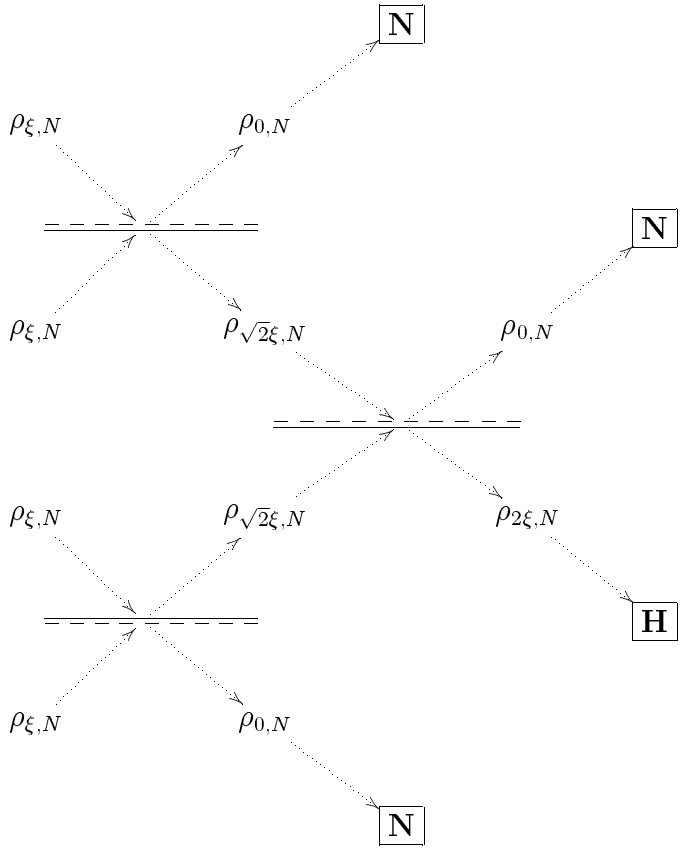

図 5

ここで $\boxed{\mathbf{N}}$ は個数測定を, $\boxed{\mathbf{H}}$ はヘテロダイン測定を表すとする.

そして, サンプル数 n が 2 の巾乗のときは同様の量子相関を用いた測定が構成できる. 従って, このような測定器の列の極限を考えると, 漸近的に複素振幅 $\xi = \theta^1 + \theta^2 i$ とノイズの大きさ $N = \theta^3$ を互いに情報を失うことなく同時に測定できる. したがって $C_\theta^{\mathrm{QC}}(G) = C_\theta^R(G)$ を得る.

5.2 量子 2 準位系での状態推定

量子 2 準位系では条件 (23) を満たすことが確かめられ,

$$C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G) = C_\theta^U(G). \tag{25}$$

を得る. 同様に条件 (23) は部分状態族でも満たされるので (25) は $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ の部分状態族でも成立する. また $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ では $T^*_{\rho_\theta}$ が $\mathcal{D}$ の作用に関して不変であるため,RLD 型下限 $C_\theta^R(G)$ が $C_\theta^H(G)$ と等しくなる. さらにその RLD 型限 $C_\theta^R(G)$ はサンプル間の量子相関を許すことにより達成できる.(証明略). 従って以下の式を得る.

$$C_\theta^{\mathrm{QC}}(G) = C_\theta^R(G). \tag{26}$$

さらに,$C_\theta^H(G)$ の導出過程を振り替えると, $T^*_{\rho_\theta}$ が $\mathcal{D}$ の作用に関して不変で RLD 型下限 $C_\theta^R(G)$ が達成可能な状態族ではその部分状態族での下限 $C_\theta^H(G)$ は達成可能となる. 従って $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ の部分状態族では以下の式が成立する.

$$C_\theta^{\mathrm{QC}}(G) = C_\theta^H(G). \tag{27}$$

以下ここで述べた内容について具体的な $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ の部分状態族について計算することにする.

5.2.1 部分状態族 $\mathcal{S}_{r=r_0}$

ここで $\rho_\theta = \rho_{(r_0,\frac{\pi}{2},0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & r_0 \\ r_0 & 1 \end{pmatrix}$ のときについてのみ考える. このとき $L_\theta = r_0\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L_\phi = r_0\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ となる. そこで先ほどと同じように重み行列を $G = \begin{pmatrix} g_1+g_2 & g_3 \\ g_3 & g_1-g_2 \end{pmatrix}$ とパラメトライズすると, この部分状態族は $\mathcal{D}$ 不変であることから (27) より

$$C_\theta^{\mathrm{QC}}(G) = C_\theta^R(G) = \frac{2\left(g_1 + r_0\sqrt{g_1^2 - g_2^2 - g_3^2}\right)}{r_0^2}$$

を得る. さらに条件 (25) より,

$$C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G) = C_\theta^U(G) = \frac{\left(\sqrt{g_1+\sqrt{g_2^2+g_3^2}} + \sqrt{g_1-\sqrt{g_2^2+g_3^2}}\right)^2}{r_0^2}$$

を得る. さらにこれらを用いて, $V_\theta(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} x+y & z \\ z & x-y \end{pmatrix}$ とパラメトライズすると $V_\theta(\mathcal{F})$ の取りうる範囲の境界は NQC 推定の場合以下の式で表される.

$$x = \frac{1+\sqrt{r_0^4(y^2+z^2)+1}}{r_0^2}.$$

一方,QC 推定の場合, 境界は以下の式で表される.

$$x = \frac{1+\sqrt{r_0^4(y^2+z^2)+r_0^2}}{r_0^2}.$$

これらの境界は y-軸 と z-軸との回転に関して対称である.

次に J_θ^M の取り得る範囲の境界を先ほどと同じパラメトライズの下で考える. NQC 推定の場合, 境界は以下の式で得られる.

$$x = \frac{r_0^2}{2}, \quad y^2+z^2 \le \frac{r_0^4}{4}$$

一方, QC 推定の場合は以下の式で記述される.

$$x = r_0^2\frac{1-\sqrt{r_0^2+\left(1-\frac{1}{r_0^2}\right)^2(y^2+z^2)}}{1-r_0^2}, \quad y^2+z^2 \le \frac{r_0^4}{4}.$$

ともに $r_0 = 1$ のときには両者が一致することが確かめられる.

5.2.2 部分状態族 $\mathcal{S}_{\phi=0}$

先ほどと同じように, ここで $\rho_\theta = \rho_{(r_0,\frac{\pi}{2},0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & r_0 \\ r_0 & 1 \end{pmatrix}$ のときについてのみ考える. このときは $C_\theta^H(G) = C_\theta^S(G)$ となる. ここで $J_\theta = \mathrm{I}$ となる座標系で考える. 従って, 先ほどと同じように重み行列 G をパラメトライズすると, 以下の式を得る.

$$C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G) = C_\theta^U(G) = \left(\sqrt{g_1 + \sqrt{g_2^2+g_3^2}} + \sqrt{g_1 - \sqrt{g_2^2+g_3^2}}\right)^2$$
$$C_\theta^{\mathrm{QC}}(G) = C_\theta^S(G) = 2g_1.$$

$V_\theta(\mathcal{F})$ の取りうる範囲の境界は §5.2.1 と同じようにパラメトライズして考える. NQC 推定の場合は (28) で QC 推定の場合は (29) で記述される.

$$x = 1 + \sqrt{(y^2+z^2)+1} \tag{28}$$
$$x = 1 + \sqrt{y^2+z^2}. \tag{29}$$

J_θ^M の取り得る範囲の境界についても NQC 推定の場合は (30) で QC 推定の場合は (31) で記述される.

$$x = \frac{1}{2}, \qquad y^2+z^2 \leq 1 \tag{30}$$
$$x = 1 - \sqrt{y^2+z^2}, \qquad y^2+z^2 \leq 1. \tag{31}$$

なおこのモデルの場合 QC 型下限 $C_\theta^{\mathrm{QC}}(G)$ を (r,θ_0) で局所的に達成させるには n 個のサンプルに対しては物理量

$$L_{\theta_0}^{(n)} := L_{\theta_0}\otimes\mathrm{I}\otimes\cdots\otimes\mathrm{I} + \mathrm{I}\otimes L_{\theta_0}\otimes\cdots\otimes\mathrm{I} + \cdots + \mathrm{I}\otimes\mathrm{I}\otimes\cdots\otimes L_{\theta_0}. \tag{32}$$

と物理量

$$\left(L^{(n)}\right)^2 := \left(\sigma_x^{(n)}\right)^2 + \left(\sigma_y^{(n)}\right)^2 + \left(\sigma_z^{(n)}\right)^2$$

を同時に測定すればよい. そのような測定から得られるデータを適切に処理することによって構成される推定量を考えると $C_\theta^{\mathrm{QC}}(G)$ が達成される. なお $\sigma_x^{(n)}, \sigma_y^{(n)}, \sigma_z^{(n)}$ は (32) と同様に定義することとする.

6 結論

本研究を通じてサンプル間の量子相関を用いることによって推定精度が向上することがはっきりした. 今後 NQC 型下限 $C_\theta^{\mathrm{NQC}}(G)$ 及び $C_\theta^{\mathrm{QC}}(G)$ を求めるより一般的な手法を確立する必要がある.

7　謝辞

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻 (数学系) の山内淳生氏には補題 12 を証明して頂いた. この場を借りて感謝したい.

A　補題 4 の証明

補題 4 の証明　始めに以下を示す.

$$C_{\theta_0}^{NQC}(G) \geq \inf \left\{ \operatorname{tr} G \left(J_{\theta_0}^{M}\right)^{-1} \middle| M \text{ は } \mathcal{H} \text{ 上の任意の POVM } \right\}. \tag{33}$$

NQC 推定量 $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n, T_n)$ について考える. $C_{\theta_0}(G, \mathcal{E}) < \infty$ とすると, θ_0 の適当な近傍で以下の式を得る.

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta^i(\mathcal{E}_n, T_n) = \theta^i. \tag{34}$$

このとき, $E_\theta^i(\mathcal{E}_n, T_n)$ を以下のように定義した.

$$E_\theta^i(\mathcal{E}_n, T_n) := \underbrace{\int \cdots \int}_{n} T_n^i(\omega_1, \cdots, \omega_n) P_\theta^{\mathcal{E}_n}(\, d\omega_1, \ldots, d\omega_n).$$

以下 G が対角になる座標を取って考える. そして, 以下の定義を行う.

$$\left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)_j^i := \frac{\partial E_\theta^i(\mathcal{E}_n, T_n)}{\partial \theta^j}(\theta).$$

n 個のサンプルに対して, 再帰的な測定の系列 $\mathcal{E}_n$ を行ったときに得られる, 確率分布族の $\theta = \theta_0$ での Fisher 情報行列を $J_{\theta_0}^{\mathcal{E}_n}$ で表すことにする. Cramér-Rao 不等式の証明と同様にして,

$$\left[V_\theta^{i,j}(\mathcal{E}_n, T_n)\right]_{i,j} \geq \left[\sum_{k,l} \left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)_k^i \left(J_\theta^{\mathcal{E}_n}\right)^{-1;k,l} \left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)_l^j \right]_{i,j}$$

を得る. さらに [6] より, 以下の条件を満たす $\mathcal{H}$ 上の POVM $\mathcal{E}_n(\theta)$ が取れる.

$$\frac{1}{n} J_\theta^{\mathcal{E}_n} = J_\theta^{\mathcal{E}_n(\theta)}.$$

従って,

$$n \sum_{i,j} G_{j,i} V_\theta^{i,j}(\mathcal{E}_n, T_n) \geq \sum_{i,j,k,l} G_{j,i} \left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)_k^i \left(J_\theta^{\mathcal{E}_n(\theta)}\right)^{-1;k,l} \left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)_l^j \tag{35}$$

を得る. さらに, 任意の $a \in \mathbb{R}^d$ について,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k,l} a^l \left(A_{n,\theta_0+at}(\mathcal{E})\right)^j_l G_{j,i} \left(A_{n,\theta_0+at}(\mathcal{E})\right)^i_k a_k - \sum_{k,l} a^l G_{l,k} a_k \\
=&\sum_j \left(a^l \frac{\partial E^j_\theta(\mathcal{E}_n, T_n)}{\partial \theta^l}(\theta_0 + at) \right)^2 G_{j,j} - \sum_j (a^l)^2 G_{j,j} \\
=&\sum_j \left(\frac{dE^j_{\theta_0+at}(\mathcal{E}_n, T_n)}{dt}(t) \right)^2 G_{j,j} - \sum_j (a^l)^2 G_{j,j}.
\end{aligned}$$

(34) より補題 12 が使えるので,

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{dE^j_{\theta_0+at}(\mathcal{E}_n, T_n)}{dt}(t) \right)^2 - (a^l)^2 \geq 0.$$

従って $\{a \in \mathbb{R}^d | \|a\| = 1\}$ はコンパクトであるから,

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\theta\to\theta_0}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{\{a\in\mathbb{R}^d | \|a\|=1\}} \sum_{k,l} a^l \left(\sum_{i,j} \left(\left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)^j_l G_{j,i} \left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)^i_k \right) - G_{l,k} \right) a^k \\
\geq&\overline{\lim_{t\to 0}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{\{a\in\mathbb{R}^d | \|a\|=1\}} \left(\sum_j \left(\frac{dE^j_{\theta_0+at}(\mathcal{E}_n, T_n)}{dt}(t) \right)^2 G_{j,j} - \sum_j (a^j)^2 G_{j,j} \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

任意の n について $\left(J^{\mathcal{E}_n(\theta)}_\theta\right)^{-1}$ は正定値行列であるので,

$$\overline{\lim_{\theta\to\theta_0}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i,j,k,l} \left(J^{\mathcal{E}_n(\theta)}_\theta\right)^{-1;k,l} \left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)^j_l G_{j,i} \left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)^i_k - \sum_{k,l} G_{l,k} \left(J^{\mathcal{E}_n(\theta)}_\theta\right)^{-1;k,l} \geq 0$$

を得る. 従って (35) を用いると,

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\theta\to\theta_0}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n \sum_{i,j} G_{j,i} V^{i,j}_\theta(\mathcal{E}_n, T_n) && (36)\\
\geq&\overline{\lim_{\theta\to\theta_0}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i,j,k,l} \left(J^{\mathcal{E}_n(\theta)}_\theta\right)^{-1;k,l} \left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)^j_l G_{j,i} \left(A_{n,\theta}(\mathcal{E})\right)^i_k \\
\geq&\underline{\lim_{\theta\to\theta_0}}\ \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k,l} G_{l,k} \left(J^{\mathcal{E}_n(\theta)}_\theta\right)^{-1;k,l} \\
\geq&\underline{\lim_{\theta\to\theta_0}} \inf \left\{ \operatorname{tr} G \left(J^M_\theta\right)^{-1} \middle| \ M \text{ は } \mathcal{H} \text{ 上の任意の POVM } \right\} \\
=&\inf \left\{ \operatorname{tr} G \left(J^M_{\theta_0}\right)^{-1} \middle| \ M \text{ は } \mathcal{H} \text{ 上の任意の POVM } \right\}. && (37)
\end{aligned}$$

従って (33) を得た. なお (37) の最後の等式はモデルに適切な正則性条件を課せば成立する. 本稿ではそのような正則性条件が成立していると仮定して議論を進める. さらに M を任意の測

定値集合 Ω 上の任意の測定とする. そして, 確率分布族 $\{\mathrm{Tr}\,\rho_\theta M(\cdot)|\theta\in\Theta\}$ の最尤推定量を $\hat{T}_n$ とすることにする. そして, 同一の測定 M を n 個のサンプルに対して行う測定を $M\times n$ と書くことにすると, 以下の式を得る. 例えば [9] を参照のこと.

$$\lim_{n\to\infty} nV_\theta(M\times n,\hat{T}_n)=\left(J_\theta^M\right)^{-1}.$$

従って (33) で等号が成立する.

次に以下の (38) を示す.

$$\begin{aligned}&\inf\left\{\mathrm{tr}\,G\left(J_{\theta_0}^M\right)^{-1}\middle|\,M\text{ は }\mathcal{H}\text{ 上の任意の POVM }\right\}\\ =&\inf\{\mathrm{tr}\,GV_{\theta_0}(M)|M\text{ は }\theta_0\text{ での局所不偏推定量 }\}.\end{aligned}\tag{38}$$

M を任意の局所不偏推定量とする. すると Cramér-Rao 不等式より,

$$V_\theta(M)\geq\left(J_\theta^M\right)^{-1}.$$

逆に M を任意の測定値集合 Ω 上の任意の測定としたとき, 以下の 2 つの条件を満たす Ω から $\mathbb{R}^d$ への写像 T がとれる.

$$\circ(M,T)\text{ は }\theta_0\text{ での局所不偏推定量 },\quad \circ V_\theta(M,T)=\left(J_\theta^M\right)^{-1}$$

従って (38) を得る. □

補題 12 実数から実数への 1 回微分が連続な関数の列 f_n を考える. x_0 の近傍で以下の条件が成立するとする.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=ax.$$

このとき,

$$\limsup_{x\to x_0}\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{df_n}{dx}(x)\right)^2-a^2\geq 0$$

を得る.

証明　補題を証明するには x_0 の近傍で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=x$$

となる関数列 f_n に対して,

$$\limsup_{x\to x_0}\limsup_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x_0)\geq 1$$

となることを示すと良い. これを示すには,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

となる関数列 f_n に対して,

$$\limsup_{x\to x_0} \limsup_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x_0) \geq 0 \tag{39}$$

を示すとよい. 以下では (39) が成立しないと仮定して矛盾を導く. すなわち以下の条件を満たす閉区間 $[c,d]$ が存在するとする.

$$g(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x), \quad \forall x \in [c,d]$$

さらに補題 13 の (40) が成立するような $[c,d]$ の閉部分区間 $[a,b]$ を取る. このとき,

$$[a,b] = \cup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in [a,b] \,\middle|\, g(x) < -\frac{1}{n} \right\}.$$

ここで十分小さな $\delta > 0$ を取ると,

$$M_1 := \mu\left(\{x \in [a,b] | g(x) < -\delta\}\right) > 0$$

ただし μ は Lebesgue 測度とする.

$$V_n := \left\{ x \in [a,b] \,\middle|\, \frac{df_m}{dx}(x) < -\frac{\delta}{2}, \quad \forall m > n \right\}$$

とすると,

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} V_n\right) \geq M_1$$

となる. したがって, 十分大きな N を取ると,

$$M_2 := \mu\left(V_n\right) > 0$$

となる. $m > N$ とすると条件 (40) より,

$$\int_a^b \frac{df_m}{dx}(x)\,dx = \int_{[a,b]\setminus V_n} \frac{df_m}{dx}(x)\,dx + \int_{V_n} \frac{df_m}{dx}(x)\,dx \leq \int_{V_n} \frac{df_m}{dx}(x)\,dx = -\frac{\delta M_2}{2}$$

従って

$$|f_m(b) - f_m(a)| \geq \frac{\delta M_2}{2}$$

ここで $m \to \infty$ を取ると矛盾を得る. □

補題 **13** $\mathbb{R}$ の開部分集合 U で以下の条件を満たすものが存在するとする.

$$\#\left\{n \,\middle|\, \frac{df_n}{dx}(x) \geq 0 \forall x \in U\right\} < \infty$$

このとき, 以下の条件を満たす U の閉区間 $[a,b]$ と正の整数 N が存在する.

$$\frac{df_n}{dx}(x) \leq 0, \quad \forall x \in [a,b], \forall n \geq N. \tag{40}$$

証明　背理法を用いて示す. すなわち, 任意の U の閉区間 $[a,b]$ と任意の正の整数 N に対して, 以下の条件を満たす $n \geq N$ と $x \in [a,b]$ が取れる.

$$\frac{df_n}{dx}(x) > 0.$$

従って, 以下の条件を満たす閉区間の列 $U \supset [a_1,b_1] \supsetneqq [a_2,b_2] \supsetneqq \cdots$ と整数の列 $n_1 < n_2 < \cdots$ が取れる.

$$\frac{df_{n_j}}{dx}(x) > 0, \quad \forall x \in [a_j,b_j].$$

$x_0 \in \cap_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j] \neq \emptyset$ とすると,

$$\frac{df_{n_j}}{dx}(x_0) > 0$$

となり矛盾. □

参考文献

[1] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory,* (Academic Press, New York, 1976).

[2] H. P. Yuen and M. Lax, IEEE trans. **IT-19**, 740 (1973).

[3] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, (North_Holland, Amsterdam, 1982).

[4] Naĭmark, Comptes Rendus (Doklady) de l'Acadenie des Sience de l'URSS, vol. **41**, No. **9**, 359, (1943).

[5] 日合文雄, 柳研二郎, ヒルベルト空間と線形作用素, (牧野書店, 1995).

[6] 林正人, 松本啓史, "測定自由度をもつ統計モデルと量子力学," 数理解析研究所講究録 **1055**, 96-110, (1998).

[7] M. Hayashi, "A Linear Programming Approach to Attainable Cramer-Rao type bound and Randomness Conditions" Kyoto-Math 97-08. E-print http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9704044.

[8] 林正人 "量子推定理論における漸近的大偏差型評価について," シンポジウム「統計的推測理論とその情報論的側面」予稿集.

[9] 野田一雄, 宮岡悦良, 数理統計学の基礎, (共立出版, 1992).

[10] 林正人 "非可換物理量の同時測定について," 数理解析研究所講究録「無限次元非可換解析学の展開」掲載予定.