SU(2) 作用のエンタングルメントを用いた推定

林　正人 *
masahito@qci.jst.go.jp
*独立行政法人 科学技術振興機構　ERATO 今井量子計算機構プロジェクト
〒 113-0033 東京都文京区本郷 5-28-3 第二本郷ホワイト
TEL: 03-3818-3319　FAX: 03-3818-3285

あらまし　同一の未知の SU(2) の作用が働く複数の量子系が与えられたとき、これらの系間の entanglement を用いた場合での未知の SU(2) の作用の推定精度について議論した。その結果、この問題は Buzek, Derka and Massar[2] によって解析された固有ベクトルが既知である場合のこの問題と極めて類似した構造を持つことが明らかになった。さらに通常の推定とは異なり、量子系の数を n としたとき、その誤差は $\frac{1}{n^2}$ のオーダーで 0 に収束することがわかった。さらに、ここで用いられている手法は Fujiwara[1] による参照系を用いた SU(2) 作用の推定とも重要な関連がある。

キーワード　量子推定、SU(2) の作用、エンタングルメント

Estimation of SU(2) action by using entanglement

Masahito Hayashi *
masahito@qci.jst.go.jp
*ERATO Quantum Computation and Information Project, JST
201 Daini Hongo White Bldg. 5-28-3, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033, Japan
TEL: +81-3-3818-3319　FAX: +81-3-3818-3285

Abstract　We discussed the accuracy of the estimation of the n identical unknown actions of SU(2) with using quantum entanglement. We found that this problem has a similar structure with the same estimation problem with the knowledge of the eigenvalue, which was discussed by Buzek, Derka and Massar[2]. When the number n of system acted the unkown action is enough large, the estimation error goes to 0 with the order $\frac{1}{n^2}$.

key words　Quantum Estimation, Action of SU(2), Entanglement

1 はじめに

量子系に対するノイズの無い場合の状態変化はユニタリ行列で書ける。しかし多くの場合、どのようなユニタリ行列が実際に働いているのか不明である場合が多い。これを知るためには、実際に色々な状態を入力し、そのときの変化後の状態を調べることになる。Fujiwara[1] は量子 2 準位系の場合にこの問題を扱い、dense coding の場合のように参照系とエンタングルさせることによって全く参照系を用いない場合よりも著しく推定精度が向上することを示した。もちろん、このような問題設定では、同じタイプの実験を複数回行ない、その統計的なデータを用いて、推定することになる。したがって、n 個のデータから推定する場合は、n 回、未知の同一の状態変化を施すことになる。すなわち、その未知の状態変化が起きる量子系が n 個あるわけである。ここで、1 つの方法として、この n 個の量子系にまたがる状態を入力し、最後に n 個の系にまたがる量子測定を用いて推定を行なうとどのようになるであろうか？もちろん、この問題設定では、個別の状態を入力し、個別に測定するという手法も含まれている。この論文ではこのように選択肢を広げることで、どの程度推定精度が向上するか考えることにする。

しかし、既にこれと類似の問題は Bužek, Derka and Masar[2] により、解析されている。彼らの議論は実質的には以下と同値である。量子 2 準位系の未知のユニタリ行列の推定問題で、固有ベクトルが既知で、固有値が未知の場合にこの問題を考える。そして、パラメータ θ を取り、その推定値 $\hat{\theta}$ とのリスクを $\sin^2(\hat{\theta}-\theta)$ に取り、その期待値を誤差を評価する基準として注目する。その結果、最適な場合では推定精度は準備する系の数を n とするとこの値は n では無く、n^2 に反比例し、0 に収束することが分かった。通常、$\sin^2(\hat{\theta}-\theta)$ のように $\hat{\theta}-\theta$ が十分小さい場合にその 2 次式で近似できる場合は、最適な場合であっても、その期待値は n の逆数に比例するのが普通である。しかし、彼らが解析したモデルでは、それを超える早さで誤差が 0 に収束するわけである。

ただ、このような現象は、ユニタリ行列を推定する問題で普遍的に起こることか、それとも、未知パラメータが 1 であることに起因することであるかは興味のあるところである。本稿では、未知パラメータを、量子 2 準位系のユニタリ行列全体に広げた場合にこれと類似の現象について調べた。その結果、この量子 2 準位系のユニタリ行列を推定する問題と Bužek, Derka and Masar が扱った問題とは、驚くべき対応関係があることが分かり、その対応関係から、自明に、誤差が n^2 の逆数に比例して 0 に収束することが分かった。さらに、ここで用いた方法では Fujiwara[1] のように、参照系とエンタングルさせた状態を用いた場合とそうでない場合を比較すると、ほとんど推定精度に差が無いこともわかった。ここでは、興味深いことに、既に準備した系の内部をある意味で参照系とみなすことができることが本質的である。いわば、“自己エンタングルメント” による効果があるとも言える。本稿では、始めに、Bužek, Derka and Masar が扱った、量子 2 準位系で固有値のみが未知のユニタリ行列を推定する問題の議論を紹介し、その後に、量子 2 準位系のユニタリ行列が全く分からない場合の推定問題について扱う。

2 固有値のみが未知のユニタリ行列の推定

c を絶対値が 1 の複素数とするとき、ユニタリ行列 U の作用を考える場合実質的に U の作用と cU の作用を考えた場合、これらは同じになる。従って、実質的には量子 2 準位系で固有ベクトルが既知の場合は未知のパラメータは 1 つとなる。ここでは、量子 2 準位系 $\mathcal{H}=\mathbb{C}^2$ での未知のユニタリ行列が $\left\{ U_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0,2\pi) \right\}$ に含まれていると仮定して、未知パラメータ $\theta \in [0,2\pi)$ を推定する問題を考える。そして、n 個の量子系 $\mathcal{H}$ の合成系 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ に同じ U_θ が作用するとする。さらに、我々は U_θ を推定するために準備する初期状態を $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の全ての状態から選択できるとする。

そのため、$\mathcal{H}^{\otimes n}$ へ $U_\theta^{\otimes n}$ が作用するとして、未知のパラメータ θ を推定する問題を考えることになる。この問題では、我々が推定のために入力状態 $x \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ と $[0,2\pi)$ に値を取る $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の測定 (POVM) $M^n(d\hat{\theta})$ を選択することができるとする。そして、真の値 θ と推定値 $\hat{\theta}$ とのずれを $\sin^2\frac{\theta-\hat{\theta}}{2}$ で評価することとすると、そのときの誤差は

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_\theta^n(M^n,x)\\ &\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\theta-\hat{\theta}}{2}\langle x|(U_\theta^{\otimes n})^* M^n(d\hat{\theta})U_\theta^{\otimes n}|x\rangle\end{aligned}$$

で与えられる。入力状態 $x \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ を固定すると、状態族 $U_\theta^{\otimes n}|x\rangle\langle x|(U_\theta^{\otimes n})^*$ の推定の最適化問題に帰着できる。

一般に、$u_0,\ldots,u_d$ で張られる d 次元空間 $\mathcal{H}'$ 上にユニタリ行列 $U_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^N e^{ik\theta}|u_k\rangle\langle u_k|$ が作用し、未知状態が $\mathcal{H}'$ 上のある純粋状態 $|x\rangle\langle x|$ を用いて $\rho_\theta \stackrel{\text{def}}{=} U_\theta|x\rangle\langle x|U_\theta^*$ で与えられ、未知パラメータ θ を推定する問題を考える。この場合 1 次元円周 $\theta' \in [0,2\pi)$ からなる群の作用

$$\rho_\theta \mapsto U_{\theta'}\rho_\theta U_{\theta'}^* \tag{1}$$

による対称性をもつ。推定量の性能を評価するには、未知パラメータ θ ごとの推定誤差を評価することになる。特に、ミニマックス法とよばれる方法では、最

も推定精度が悪くなる場合の誤差に注目し、これを最小化することになる。(1) のような対称性がある場合は、ミニマックス法での最適な推定量は (1) と同種の対称性を満たすものに限られる。一般に推定量はパラメータ空間 $[0, 2\pi)$ に値を持つ POVM $M(d\hat{\theta})$ で与えられる。そして、真の値が θ である場合での誤差を

$$\mathcal{D}_\theta(M) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\theta - \hat{\theta}}{2} \operatorname{Tr} M(d\hat{\theta}) \rho_\theta \tag{2}$$

で評価する。このとき、最適な推定量は $x = \sum_{i=0}^d x^i u_i$ とすると、

$$M_x(d\hat{\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m,n} |u_m\rangle\langle u_n| e^{i(m-n)\hat{\theta}} \frac{x_m x_n^*}{|x_m||x_n|} \frac{d\hat{\theta}}{2\pi}$$

で与えられ、その誤差は $\mathcal{D}_\theta(M_x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^d |x_i||x_{i-1}|\right)$ となる [3, 4, 5]。

$x \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ に対して、$U_\theta^{\otimes n}$ の固有値 $e^{ik\theta}$ の固有空間への射影を P_k とし、$P_k x$ を正規化したベクトルを u_k とすることで $x \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ を固定した場合の議論はここで扱った問題に帰着できる。それゆえ、最適な場合の $\mathcal{D}_\theta^n(M^n, x)$ の値は

$$\mathcal{D}_{opt}^n \stackrel{\text{def}}{=} \min_{(a_k)_{k=0}^n} \left\{ \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=1}^n a_k a_{k-1}\right) \middle| \sum_{k=0}^n a_k^2 = 1, a_k \geq 0 \right\}$$

で与えられる。そして Bužek, Derka and Masar[2] は n が十分に大きい場合にはその最小値は $a_k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} \sin\frac{\pi(k+1/2)}{n+1}$ の場合にほぼ一致することを微分方程式の理論を用いて示した。また、この最小値はほぼ $\frac{\pi^2}{4(n+1)^2}$ に一致することを示した。

なお、この議論は、1 次元円周 $S^1 = [0, 2\pi)$ の作用と見ると、u_k で生成される 1 次元部分空間が、既約な空間となる。そして、固有値が $e^{ik\theta}$ となる 1 次元部分空間は、この表現に注目すると、同値な空間となる。ここでは、互いに異なった表現となる $n+1$ 個の 1 次元部分空間のみを U_θ の推定に用いたことなる。

3 SU(2) の作用の推定

次に、$\mathcal{H}$ に作用するユニタリ行列が全く未知の場合での推定問題を考える。この場合も先と同様の理由により、$g \in \mathrm{SU}(2)$ が作用すると考え、これを推定することにする。そして、先と同様に g が作用する空間が n 個準備されていると仮定し、我々は少なくともその合成系 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の任意の状態を初期状態として選択できるとする。

このような問題に対して、Fujiwara[1] は $g \in \mathrm{SU}(2)$ が作用する系 $\mathcal{H}$ と独立に、もう 1 つ別の量子 2 準位系 $\mathcal{H}_R$ を考え、初期状態を合成系 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_R$ 上の最大エンタングルド状態とした場合、$\mathcal{H}$ 上のどの状態を初期状態とした場合よりも、効率的な推定が可能であることを示した。ただ、彼の手法では、g が作用する空間の間のエンタングルメントは考えられなかった。以下ではこのように実際に g が作用しない空間 $\mathcal{H}_R$ を参照系とよぶことにする。

本論文では、合成系 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ とこれと同じ次元で g が作用しない空間 $\mathcal{H}_{R,n}$ を考え、$\mathcal{H}^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_{R,n}$ 上の任意の状態を初期状態として選択できる場合について考える。そして、真の行列 g と推定値 $\hat{g}$ との相違の度合は x_M を $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_R$ 上の最大エンタングルド状態を用いて

$$d(g, \hat{g}) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - |\langle x_M|(g^* \otimes I)(\hat{g} \otimes I)|x_M\rangle|^2$$

で評価するとする。すると、$\mathcal{H}^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_{R,n}$ 上の初期状態が x であり、SU(2) に値を取る $\mathcal{H}^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_{R,n}$ 上の POVM $M^n(d\hat{g})$ で測定を行なった場合の誤差は

$$\mathcal{D}_g(M, x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathrm{SU}(2)} d(g, \hat{g}) \langle x|(g^{\otimes n} \otimes I)^* M(d\hat{g})(g^{\otimes n} \otimes I)|x\rangle \tag{3}$$

で与えられる。

ここで SU(2) の $\mathcal{H}^{\otimes n}$ への表現を考え、これの既約分解を考える。すると、

$$\mathcal{H}^{\otimes 2m} = \bigoplus_{k=0}^m \mathcal{H}_{2k+1} \otimes \mathcal{H}_{2m,2k+1} \tag{4}$$

$$\mathcal{H}^{\otimes 2m-1} = \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{H}_{2k} \otimes \mathcal{H}_{2m-1,2k} \tag{5}$$

となる。なお、$\mathcal{H}_k$ は次元が k 次元である SU(2) の既約表現とする。また、$\mathcal{H}^{\otimes n}$ 内に $\mathcal{H}_j$ と同値な表現が現れる個数と同じ次元の空間を $\mathcal{H}_{n,j}$ とする。したがって、上の右辺で実質的に g の作用が現れるのは $\mathcal{H}_{2k+1}$ や $\mathcal{H}_{2k}$ の部分のみである。また、$\mathcal{H}_j$ への SU(2) の表現を V_g^j であらわすことにする。

いきなり、複数の既約成分が現れる場合を議論すると大変難しいので、1 つの既約空間 $\mathcal{H}_j$ を用いる場合を考える。すなわち、最も次元の大きい空間のみを推定のために使うというわけである。この場合 $\mathcal{H}_j$ と同じ次元の空間 $\mathcal{H}_{j,R}$ を考え、初期状態が $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_{j,R}$ 上の最大エンタングルド状態 $x_{j,E}$ である場合を考える。そして、μ を SU(2) 上の群の作用について不変な確率分布として[1] 、最終的に g を推定するための測定を $M_{j,E}(d\hat{g}) \stackrel{\text{def}}{=} j^2 V_{\hat{g}}^j |x_{j,E}\rangle\langle x_{j,E}| (V_{\hat{g}}^j)^* \mu(d\hat{g})$ で与える。ここで係数 j^2 は全積分が単位行列になるために、必要な係数であり、この全積分が単位行列の定数倍になることは x_E が最大エンタングルド状態であることから容易に確認できる。

[1] SU(2) はコンパクト群であるので、両側からの作用に不変な確率分布が存在する。

この場合での (3) に対応する量は $\mathrm{Tr}\, V_g^j = \mathrm{Tr}(V_g^j)^*$ であることから、

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{SU}(2)} d(g,\hat{g}) j^2 \langle x_{j,E}|(V_g^j)^* V_{\hat{g}}^j |x_{j,E}\rangle \\
&\langle x_{k,E}|(V_{\hat{g}}^j)^* V_g^j |x_{j,E}\rangle \mu(d\hat{g}) \\
=&\int_{\mathrm{SU}(2)} d(g,\hat{g}) |\,\mathrm{Tr}\, V_{\hat{g}^{-1}g}^j|^2 \mu(d\hat{g}) \\
=&\int_{\mathrm{SU}(2)} d(I,\hat{g}) |\,\mathrm{Tr}\, V_{\hat{g}^{-1}}^j|^2 \mu(d\hat{g}) \\
=&\int_{\mathrm{SU}(2)} d(I,\hat{g}) |\,\mathrm{Tr}\, V_{\hat{g}}^j|^2 \mu(d\hat{g}) = \begin{cases} \frac{3}{4} & j=1 \\ \frac{1}{2} & j \geq 2 \end{cases} \quad (6)
\end{aligned}$$

となる。最後の部分については次の節を参照のこと。

したがって、空間の次元が上がっても、このように、1 つの既約成分のみを推定に使うと全然、推定誤差が減らない。したがって、他の既約成分も用いた推定方法を考えることにする。以下、簡単のため $n = 2m-1$ の場合のみ扱うが、ほとんど同様の議論が偶数の倍でも可能である。この場合、m 個の異なる既約成分があるわけであり、これらの間の相関を如何に用いるかがポイントである。

以下、空間 $\mathcal{H}^{\otimes 2m-1} \otimes \mathcal{H}_{R,2m-1}$ の部分空間で

$$\bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{H}_{2k} \otimes \mathcal{H}_{2k,R}$$

と書けるものを考え、この空間への表現を V_g^{2m-1} と書くことにする。そして、ベクトル $\vec{a}_m = (a_k)_{k=1}^m$ で $a_k \geq 0$ となるものを選び、初期状態として、$x_{\vec{a}_m}^{2m-1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{k=1}^m a_k x_{2k,E}$ を考える。測定としては

$$\begin{aligned}
M^{2m-1}(d\hat{g}) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} V_g^{2m-1}|y^{2m-1}\rangle\langle y^{2m-1}|(V_g^{2m-1})^* \mu(d\hat{g}) \\
y^{2m-1} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{k=1}^{m} (2k) x_{2k,E}
\end{aligned}$$

を考える。これの全積分が単位行列になることは Schur の補題から簡単に確かめることができる。このときの誤差は

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{SU}(2)} d(g,\hat{g}) \langle x_a^{2m-1}|(V_g^{2m-1})^* V_{\hat{g}}^{2m-1}|y^{2m-1}\rangle \\
&\quad \langle y^{2m-1}|(V_{\hat{g}}^{2m-1})^* V_g^{2m-1}|x_a^{2m-1}\rangle \mu(d\hat{g}) \\
=&\int_{\mathrm{SU}(2)} d(I,\hat{g}) \sum_{k,k'} a_k a_{k'}\, \mathrm{Tr}\, V_{\hat{g}}^{2k} (\mathrm{Tr}\, V_{\hat{g}}^{2k'})^* \mu(d\hat{g}) \\
=&\frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=1}^{m-1} a_k a_{k+1}\right) \quad (7)
\end{aligned}$$

と計算できる。(最後の計算については次の節を参照) したがって、この推定方法での最小誤差は $\mathcal{D}_{opt}^{m-1}$ と一致する。

同じように、$n = 2m$ の場合は各成分が非負であるベクトル $\vec{a}'_m = (a_k)_{k=0}^m$ に対して $x_{\vec{a}'_m}^{2m} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{k=0}^m a_k x_{2k+1,E}$ を考え、ほぼ同様の測定を考えることにより、誤差は $\frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} a_k a_{k+1}\right) + \frac{1}{4} a_0$ となり、この場合の最小値 $\mathcal{D}_{opt}^{m\ \prime}$ は $\mathcal{D}_{opt}^m \leq \mathcal{D}_{opt}^{m\ \prime} \leq \mathcal{D}_{opt}^{m-1}$ を満たす。

このように、$\mathrm{SU}(2)$ の全パラメータの推定問題は、推定方法を、対称性の良いものに限った場合、固有ベクトルが分かっている場合の推定問題と明確な対応関係があることが分かった。それゆえ、これらの値については 2 節の議論を適用することが可能となり、n が十分大きい場合はその誤差は、n が奇数である場合はほぼ $\frac{\pi^2}{(n-1)^2}$ であることが分かった。n が偶数の場合も含めて、n が十分大きい場合は誤差は $\frac{1}{n^2}$ のオーダーであり、その係数は π^2 であることがわかった。

このように見ると、実際に準備する参照系 $\mathcal{H}_{R,2m-1}$ の次元は $\mathcal{H}^{\otimes 2m-1}$ の次元分も必要なく、最も次元の大きい既約成分の次元 (この場合は $2m$) の空間で十分であることがわかる。しかも、$\mathcal{H}_{2m-1,2k}$ の次元が $\mathcal{H}_{2k}$ の次元よりも大きければ、その参照系を改めて準備する必要もなく、代わりに $\mathcal{H}_{2m-1,2k}$ で十分代用できることになる。$k = m$ のときには $\mathcal{H}_{2m-1,2k}$ の次元は 1 となり、$\mathcal{H}_{2k}$ の次元よりも小さいが、$k < m$ のときには、$\mathcal{H}_{2m-1,2k}$ の次元は $\binom{2m-1}{m-k} - \binom{2m-1}{m-k-1}$ となり、$\mathcal{H}_{2k}$ の次元以上となる。このことは、参照系を全く用いなくても、誤差は $\mathcal{D}_{opt}^{m-2}$ までは小さくできることを示している。同様に、n が偶数 $2m$ の場合でも、$k < m$ の場合には $\dim \mathcal{H}_{2k+1} \leq \dim \mathcal{H}_{2m,2k+1}$ となることが示せる。したがって、漸近的 1 次の項に注目し、この推定方法を用いる限り、参照系を用いても推定精度は向上しないことがわかった。

4 計算の詳細

以下、(6) の最後の等式と (7) の最後の等式の導出のための計算を記す。はじめに (6) であるが、$\mathrm{Tr}\, V_{\hat{g}}^j$ 及び $d(I,\hat{g})$ は g の固有値 $e^{i\theta/2}, e^{-i\theta/2}$ にのみ依存するので、$\mu(d\hat{g})$ は θ に関する積分のみ考えれば十分で、これは $\frac{1}{\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\, d\theta$ となる。さらに、これらは $d(I,\hat{g}) = \sin^2\frac{\theta}{2}, \mathrm{Tr}\, V_{\hat{g}}^j = \sum_{l=1}^j e^{i(l-\frac{j+1}{2})}$ と書けるので、

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{SU}(2)} d(I,\hat{g}) |\,\mathrm{Tr}\, V_{\hat{g}}^j|^2 \mu(d\hat{g}) \\
=&\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\sin^4\frac{\theta}{2} \left(\sum_{l=1}^j e^{i(l-\frac{j+1}{2})}\right)\left(\sum_{l=1}^j e^{i(l-\frac{j+1}{2})}\right)^* d\theta \\
=&\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) \\
&\quad \left(j + 2\sum_{l=1}^j (j-l)\cos l\theta\right) d\theta
\end{aligned}$$

となる。$j \geq 2$ の場合、この積分では括弧内の $j + 2(j-1)\cos\theta + 2(j-2)\cos 2\theta$ のみが最終的に残るこ

とになり、(6) を得る。さらに、

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} d(I,\hat{g})(\mathrm{Tr}\, V_{\hat{g}}^{2k})(\mathrm{Tr}\, V_{\hat{g}}^{2k'})^{*}\mu(d\hat{g})$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) \left(\sum_{l=1}^{2k} e^{i(l-\frac{2k+1}{2})}\right)\left(\sum_{l=1}^{2k'} e^{i(l-\frac{2k'+1}{2})}\right)^{*} d\theta$$

となるが、$\left(\sum_{l=1}^{2k} e^{i(l-\frac{2k+1}{2})}\right)\left(\sum_{l=1}^{2k'} e^{i(l-\frac{2k'+1}{2})}\right)^{*}$ の部分で、定数項、$2\cos\theta$, $2\cos 2\theta$ の係数のみが重要となる。この場合 k と k' が 2 つ以上離れている場合、これらの係数は一致するので、積分は 0 となる。一方、$k' = k+1$ の場合は $k + 2k\cos\theta + 2(k-1)\cos 2\theta$ となり、この積分の値は $-\frac{1}{4}$ となる。$k' = k-1$ の場合も同様にして $-\frac{1}{4}$ となる。したがって、(7) が得られる。

謝辞

この研究を進めるにあたって、国立情報学研究所、ERATO 今井量子計算機構プロジェクトの松本啓史助教授、ERATO 今井量子計算機構プロジェクトの津田美幸博士、MIT の Aram W. Harrow 氏から有益な助言を頂いた。この場を借りて感謝の意を表したい。

参考文献

[1] A. Fujiwara, "Estimation of SU(2) operation and dense coding: An information geometric approach," *Phys. Rev.* A **65**, 012316 (2002).

[2] V. Bužek, R. Derka, and S. Massar, "Optimal Quantum Clocks," *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2207, 1999; LANL E-print http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9808042 (1998).

[3] C. W. Helstrom, Found. of Phys. **4**, 453 (1974).

[4] A.S. Holevo, "Covariant measurements and uncertainty relations," *Rep. Math. Phys.*, **16**, 385-400, (1979).

[5] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, (North-Holland, Amsterdam, 1982). Originally published in Russian (1980).