量子２準位系での固有値推定での量子効果

林　正人 *
masahito@qci.jst.go.jp
*科学技術振興事業団 ERATO 今井量子計算機構プロジェクト
〒 113-0033 東京都文京区本郷 5-28-3 第２本郷ホワイトビル 302
TEL: 03-3818-3319　FAX: 03-3818-3285

あらまし　量子２準位系での状態の密度作用素の固有値を推定する問題を全く、エンタングルメントを用いない測定による推定と、２つの系間の相関を用いた測定による推定とを比較する。その結果、純粋状態に近い場合については、Hendrich[5] らが行なった量子相関を用いた実験による推定が、ある種の全く相関を用いない場合での最適な実験による推定よりもより高い精度を与えることを示した。Hendrich[5] らの実験では推定精度について十分に検討していなかったが、改めて、推定精度に注意して同種の実験を行なえば、量子相関による、推定精度の向上を実験的に実証できることと思われる。

キーワード　量子２準位系, 固有値推定, 相関を用いた測定

Quantum effect on eigen-value estimation in quantum two-level system

Masahito Hayashi *
masahito@qci.jst.go.jp
*ERATO Quantum Computation and Information Project, JST
Daini Hongo White Bldg. 302, 5-28-3, Hongo, Bunkyo, Tokyo, 113-0033
TEL: +81-3-3818-3319　FAX: +81-3-3818-3285

Abstract　Concerning the estimation problem of the eigen-value of the density in the quantum two-level system, I compare the accuracy of a estimator based on a quantum correlational measurement with the one of the optimal estimator based on a measurement without quantum correlation. It is proven that the estimator realized by Hendrich et. al. [5] is better than the optimal case without quantum correlation when the true state is closed to a pure state. Although Hendrich et. al. performed this type experiment without enough accuracy, it is expected to be able to be realized to perform an estimation whose accuracy is better than the optimal case without quantum correlation.

key words　quantum two-level system, eigen-value estimation, measurement with quantum correlation

1 はじめに

量子計算をはじめとして量子暗号など様々な量子情報処理が提案されている．これらの情報処理では (量子力学的に相関を持つ) 状態が重要な役割を果たすことが少なくない．エンタングルした状態は量子系にのみ存在するもので，量子力学的な効果を有効に発揮するには必要であることが多い．一方，量子情報処理の 1 つである量子系での統計的推測では複数の状態が独立に準備されている状況を想定するため，エンタングルした状態を想定することは少ない．しかし，状態がエンタングルしていない場合でも，すなわち，量子力学的に相関を持っていない場合でも，量子力学的な相関 (量子相関) を持つ測定を行った方が，そうでない測定を行う場合よりも推定精度が良くなる場合がある．量子相関を持つ測定は量子系特有のものであるので，それを持たない測定との推定精度の差が量子効果を表していると考えることができる．本稿では，最も簡単な量子系である量子 2 準位系での密度行列の固有値の推定問題に注目し，実現可能な量子相関を持つ測定で明確に量子効果が表れるものを提案する．もちろん，量子相関を持つ測定が重要な役割を果たすのは量子系の統計的推測に限ったことではない．量子系での通信路符号化でもそれを用いることで通信路容量が向上することが理論的には確かめられている．それゆえ，量子相関を持つ量子測定の効果に関する研究は量子情報理論での 1 つの重要なテーマである．本稿では推定論の枠組みでこのような量子効果を実験的に検証する枠組みを提案する (文献 [1, 2] を参照のこと。)

1.1 量子系の数学的記述と推定の定式化

ここでは量子系を記述するために，基礎的な事項を説明する．以下に述べられることは極めて基本的であるが，標準的な量子力学の教科書には必ずしも十分に記述されていないので注意を要する．量子力学では注目する物理系 (量子系) は Hilbert 空間 (系の表現空間, 以下 $\mathcal{H}$ と記す.) で記述され, 状態は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素で記述される. $\mathcal{H}$ 上の密度作用素とは $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への self-adjoint (Hermite) な線型作用素で positive semi-definite かつその Trace が 1 となるものである. このような密度作用素の全体を $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で表す.

測定は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素 I の positive semi-definite 作用素による分解 $\{M_i\}$ で記述される. この分解 $\{M_i\}$ は POVM (正作用素値測度 Positive Operator-Valued Measure) と呼ばれる. 系が密度作用素 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対応する状態にあるとき POVM $\{M_i\}_{i=1}^k$ に対応する測定を行うとその測定値 $i = 1, \ldots, k$ は確率分布

$$\mathrm{P}_\rho^M(i) := \mathrm{Tr}\, \rho M_i \tag{1}$$

に従う. これが確率になるために，ρ 及び M の positive semi-definite であることが効いていることに注意されたい. この定式化では状態と測定の再現性が暗に仮定されている. そうでなければ, 式 (1) を実験により検証することが不可能である.

2 つの量子系 $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ の合成系はテンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ で記述される. 特に各系の状態の密度作用素がそれぞれ ρ_1, ρ_2 で与えられており, 相互作用が無いときには, 合成系上の状態の密度作用素は $\rho_1 \otimes \rho_2$ で与えられる．量子力学系におけるパラメータ推定では，状態に対応する未知の密度作用素が密度作用素族 $\mathcal{S} = \{\rho_\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ に含まれていることが既知の上で, 測定値から未知のパラメータ θ を推定することになる．この論文ではパラメータが 1 つの量子状態族 $\{\rho_\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ のパラメータ推定について考えることになる。この場合は測定に対応する POVM $M = \{M_i\}$ の選択の自由度があるわけである．それゆえ，M に応じて決まる確率分布族 $\{\mathrm{P}_{\rho_\theta}^M | \theta \in \Theta\}$ のパラメータ推定に帰着できる．

1.2 確率分布族の推定の漸近論

古典的な場合、すなわり確率分布族の推定での場合には、この議論の一般論が既に確立している．パラメータが 1 つの確率分布族 $\{p_\theta(\omega) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ のパラメータ推定では，未知の分布 p_θ に独立に従う n 個のデータ $\vec{\omega}_n := (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ から，未知パラメータを決定するという設定では，最尤推定 $\hat{\theta}_{ML,n}(\vec{\omega}_n) := \mathrm{argmax}_{\theta \in \Theta} p_\theta(\omega_1) \cdots p_\theta(\omega_n)$ を用いることが多い．データ数 n が大きいとき，最尤推定 $\hat{\theta}_{ML,n}$ の MSE は漸近的に 0 に収束するが，その早さが問題となり，次の漸近的な近似式

$$v_\theta(\hat{\theta}_{ML,n}) \cong J_\theta^{-1} \frac{1}{n} \tag{2}$$

$$J_\theta := \int \left(\frac{d}{d\theta} \log p_\theta(\omega) \right)^2 p_\theta(\omega)\, d\omega$$

が成り立つ．なお，J_θ は Fisher 情報量とよばれる．逆に推定量の列 $\{\hat{\theta}_n(\vec{\omega}_n)\}$ に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty} n\, v_\theta(\hat{\theta}_n)$ が $\theta \in \Theta$ について一様収束するのであれば，

$$\lim_{n\to\infty} n\, v_\theta(\hat{\theta}_n) \geq J_\theta^{-1} \tag{3}$$

となる．それゆえ，漸近一次の議論の範囲では最尤推定量が最適となり，Fisher 情報量の値に注目することが多い．ここで確率空間 Ω から確率空間 Ω' への写像 f を考えると，自然に確率空間 Ω' 上の分布 p'_θ を $p'_\theta(B) := p_\theta(f^{-1}(B))$ (B は Ω' の部分集合) で定義できる．この分布 p'_θ のなす分布族の Fisher 情報量を J'_θ で表すと，以下の Fisher 情報量の単調性とよばれる不等式が成り立つ．

$$J'_\theta \leq J_\theta \tag{4}$$

この不等式が成り立つことは，Fisher 情報量のもつ意味 (式 (2) 及び不等式 (3)) を考えれば容易に確認できる．確率分布族 $\{p'_\theta\}$ に対する推定量 $\hat{\theta}'$ は推定量 $\hat{\theta}(\omega) := \hat{\theta}'(f(\omega))$ を考えることで自然に，確率分布族 $\{p_\theta\}$ に対する推定量と見なすことができる．両者の平均 2 乗誤差は等しいので，分布族 $\{p'_\theta\}$ の平均 2 乗誤差の限界は分布族 $\{p_\theta\}$ の平均 2 乗誤差の限界より大きいことがわかる．これより，不等式 (4) が確認できる．しかし，極限値 $\lim_{n\to\infty} n\, v_\theta(\hat{\theta}_n)$ が J_θ^{-1} と一致する推定量は最尤推定量だけではない，漸近的に最適な推定量は他にも複数存在する．それらの中で優劣を扱うには，その次のオーダーの係数を議論することが多い．

1.3 量子系での推定の漸近論

次にパラメータが 1 つの量子状態族 $\{\rho_\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ のパラメータ推定について考えてみよう．以下では M に応じて決まる確率分布族 $\{\mathrm{P}_{\rho_\theta}^M | \theta \in \Theta\}$ の Fisher 情報量を J_θ^M で表す．未知のパラメータ θ に応じて決まる，同一の状態 ρ_θ が n 個独立に準備されている状況を考えるわけであるが，この場合その表現空間は $\mathcal{H}^{\otimes n}$ になる．例えば個々の系に対して，同一の測定 M を行い，確率分布族 $\{\mathrm{P}_{\rho_\theta}^M | \theta \in \Theta\}$ に対する最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML,n}$ を適用した場合の MSE は $v_\theta(M \times n, \hat{\theta}_{ML,n}) \cong \left(J_\theta^M\right)^{-1} \frac{1}{n}$ となる．($M \times n$ で $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の各量子系 $\mathcal{H}$ に対して独立に POVM M を行うという測定を表すこととする．) しかも，先と同様に推定量の列 $\{(M^n, \hat{\theta}_n)\}$ に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty} n\, v_\theta(M^n, \hat{\theta}_n)$ が $\theta \in \Theta$ について一様収束するのであれば，$\lim_{n\to\infty} n\, v_\theta(\hat{\theta}_{ML,n}) \geq \min_M (J_\theta^M)^{-1}$ となることが示せる．それゆえ，J_θ^M を最大にする測定 M を行い，最尤推定量を用いる方法が漸近一次の議論の範囲では最適となる．しかし，この戦略には J_θ^M を最大化する最適な測定 M が一般には θ に依存するという致命的な欠陥がある．

とにかく、推定精度は $\min_M (J_\theta^M)^{-1} \frac{1}{n}$ より小さくなることはない。この値は以下に定義する SLD Fisher 情報量 J_θ の逆数と一致する:

$$J_\theta := \mathrm{Tr}\, L_\theta^2 \rho_\theta, \quad \frac{d\rho_\theta}{d\theta} = \frac{1}{2}\left(L_\theta \rho_\theta + \rho_\theta L_\theta\right)$$

ここで L_θ は対称対数微分 (SLD) とよばれ，エルミート行列 (または自己共役作用素) である．また，$J_\theta = J_\theta^M$ となる測定は対称対数微分 L_θ のスペクトル分解に対応する測定で与えられる．すなわち，L_θ の対角化が $L_\theta = \sum_k l_k E_k$ (l_k は固有値，E_k は射影) で与えられるとすると，M が測定 $\{E_k\}$ のとき，$J_\theta = J_\theta^M$ となる．それゆえ，このような測定 $\{E_k\}$ が未知パラメータに依存しないモデルであれば，解析が極めてやさしい．

2 量子 2 準位系の固有値推定

量子系 $\mathbb{C}^2$ は量子 2 準位系とよばれ，最も基本的な量子系である．この系の密度行列は 2×2 のエルミート行列で表されるが，以下のようなパラメータを取ることが可能である．$0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$:

$$\rho_{r,\theta} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + r\cos\theta_1 & r\sin\theta_1 e^{i\theta_2} \\ r\sin\theta_1 e^{-i\theta_2} & 1 - r\cos\theta_1 \end{pmatrix},$$

この場合，r が固有値に対応し，$\theta = (\theta_1, \theta_2)$ が固有ベクトルに対応する．以下では，パラメータ r のみを推定する問題を考える．この問題では θ を推定する必要が無いが，これが未知であれば，MSE が SLD Fisher 情報量の逆数となる推定量を構成する測定は θ に依存する．そのため，そのような精度を持つ推定のためには測定を適応的に改良する必要がある．実際の実験では，適応的に測定を改良することが困難である場合が多い．それゆえ，以下では未知状態 $\rho_{r,\theta}$ にある量子系 $\mathbb{C}^2$ を $2m$ 個，独立に準備し，各系に独立に同一測定 M を行い r を推定する場合と，未知状態 $\rho_{r,\theta}^{\otimes 2}$ にある量子系 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ を m 個，独立に準備し，各系に独立に同一測定 M を行い r を推定する場合を比較する．前者で最適な場合の MSE と，後者で最適な場合の MSE の差が，量子相関を用いることのメリットとみなすことができる．

2.1 基底が分かっている場合の固有値の推定

ここでもし，θ が既知であるならば，

$$|\theta\rangle := \cos\theta_1 |+\rangle + e^{i\theta_2} \sin\theta_1 |-\rangle$$
$$|\theta^\perp\rangle := \sin\theta_1 |+\rangle - e^{i\theta_2} \cos\theta_1 |-\rangle$$
$$|+\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と置くと，$\rho_{r,\theta} = \frac{1+r}{2}|\theta\rangle\langle\theta| + \frac{1-r}{2}|\theta^\perp\rangle\langle^\perp\theta|$ となる．それゆえ，θ に対応する基底 $|\theta\rangle, |\theta^\perp\rangle$ を用いて測定すると，固有値に対応する二項分布 $\frac{1+r}{2}, \frac{1-r}{2}$ が得られる．実際，θ を固定したときに得られる量子状態族 $\{\rho_{r,\theta} | 0 < r < 1\}$ の SLD Fisher 情報量は $\frac{1}{1-r^2}$ であり，n 個の同一状態 $\rho_{r,\theta}$ にある量子系にこの測定を行い，$\theta\rangle$ に対応する測定値が k 個得られた場合は，$\frac{k}{n} = \frac{1+\hat{r}_n}{2}$ と推定値 $\hat{r}_n$ を定めると，その MSE は $\frac{1-r^2}{n}$ となる．

2.2 量子相関を用いない場合の最適化

はじめに前者の問題設定すなわち，量子相関を用いない場合での 1 次漸近論の最適化を行う．測定 M を用いて推定する場合を考えよう．すると，収束に関す

る一様性を満たす推定量 $\hat{r}_n$ を用いると仮定すると，その MSE は

$$\lim_{n\to\infty} n\, v_{r,\theta}(M\times n, \hat{r}_n) \geq (J^M_{r,\theta;r})^{-1} \tag{5}$$

となる．ここで，$J^M_{r,\theta;r}$ は θ と測定 M に依存した r が未知パラメータである確率分布族 $\{\mathrm{P}^M_{r,\theta}|0<r<1\}$ の Fisher 情報量である．不等式 (5) は θ が未知である場合は 1.2 節の議論から直接導かれる．それゆえ，θ が既知である場合も成り立つ．さらに，文献 [2] の付録の最後で述べるように、適切な古典的な推定量 $\hat{r}_n$ を選ぶと (5) で等号が成立する．

このモデルではパラメータ r を固定すると，パラメーター θ のなす空間は 3 次元球面になり，ユニタリ群の作用は，球面上の回転に相当する．すなわち，SU(2) の要素 U に対して，$U\rho_{r,\theta}U^* = \rho_{r,O(U)\theta}$ となる 3 次元空間上の回転 $O(U)$ が対応する．そのような θ に関する対称な構造に注目し，θ についての最悪な場合すなわち $\max_\theta \lim_{n\to\infty} n\, v_\theta(M\times n, \hat{r}_n)$ に注目し，これを最適化する問題を考える．この手法はミニマックス法とよばれ，統計学などでもしばしば用いられる．

ここでパラメーター θ のなす空間に全測度が 1 となる回転に関して不変な測度 $\mu(\,d\theta)$ を考える．

$$\mu(\,d\theta) := \frac{\sin\theta_1\cos\theta_1}{\pi}\,d\theta_1\,d\theta_2$$

すると，文献 [2] の付録で示すように，不等式

$$\max_\theta \lim_{n\to\infty} n\, v_{r,\theta}(M\times n, \hat{r}_n) \geq \left(\int J^M_{r,\theta;r}\mu(\,d\theta)\right)^{-1} \tag{6}$$

が成立し，測定 M がある種の対称性を持ち，$\hat{r}_n$ が最尤推定であるとき，等号が成り立つ．

そして，この問題は文献 [2] の付録で示すように，より一般的な設定の下で，群共変的測定とよばれるある種の対称性満たす測定 M に限った場合の $\int J^M_{r,\theta;r}\mu(\,d\theta)$ の最大化問題に帰着させることができる (群共変的測定では $J^M_{r,\theta;r}$ は θ に依存しないので，$J^M_{r,\theta;r}$ を最大化させる問題とみることもできる .) しかも，後の式 (8) で与える測定 M_{opt} について，

$$\int J^M_{r,\theta;r}\mu(\,d\theta) \leq J^{M_{opt}}_{r,\theta;r} \tag{7}$$

が成り立つ [2]．$J^{M_{opt}}_{r,\theta;r}$ は後に計算で確かめるように θ に依存しない．それゆえ，測定 M_{opt} はある種の対称性を満たすので最尤推定量 $\hat{r}_{ML,n}$ について，

$$\begin{aligned}&\max_\theta \lim_{n\to\infty} n\, v_{r,\theta}(M_{opt}\times n, \hat{r}_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\, v_{r,\theta_0}(M_{opt}\times n, \hat{r}_n) = \left(J^{M_{opt}}_{r,\theta_0;r}\right)^{-1}\end{aligned}$$

が成り立つ [2]．この式は，今考えている設定では測定 M_{opt} を行い，最尤推定を行う推定方法が漸近的に最適であることを示している．なお，測定 M_{opt} は以下で与えられる．

$$M_{opt}(\,d\theta) = 2|\theta\rangle\langle\theta|\mu(\,d\theta) \tag{8}$$

ここで式 (8) の係数 2 は空間の次元に対応するものである．これを掛けないと全測度が単位行列にならない．

この他に統計学では未知パラメータに事前分布を仮定し，その事前分布についての平均値に注目するという方法は Bayes 法とよばれ，もしばしば採用される．この問題に先の不変測度 $\mu(\,d\theta)$ を事前分布として Bayes 法を適用すると，

$$\lim_{n\to\infty} n\int v_{r,\theta}(M\times n, \hat{r}_n)\mu(\,d\theta)$$

に注目することになる．先の議論から積分と極限を入れ替えると，不等式

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n\int v_{r,\theta}(M\times n, \hat{r}_n)\mu(\,d\theta) \geq \int (J^M_{r,\theta})^{-1}\mu(\,d\theta)\\ &\geq \left(\int J^M_{r,\theta}\mu(\,d\theta)\right)^{-1} \geq J^{M_{opt}}_{r,\theta;r}\end{aligned}$$

が成り立つ．なお，2 つの不等式では関数 $x\mapsto 1/x$ が下に凸であることに注目し Jensen の不等式を用いた．それゆえ，双方の問題設定では，測定 M_{opt} を行い，最尤推定を用いる方法が最適となる．

そして，

$$\langle\theta|\rho_{r,0}|\theta\rangle = \frac{1}{2}\left(1+r\cos 2\theta_1\right)$$

と計算できることから，

$$\begin{aligned}J^{M_{opt}}_{r,\theta;r} =& \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{d}{dr}\log\left(1+r\cos 2\theta_1\right)\right)^2\\ &\frac{\left(1+r\cos 2\theta_1\right)2\sin\theta_1\cos\theta_1}{2\pi}\,d\theta_1\,d\theta_2\\ =&\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{r^2}+\frac{1}{r^3}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right)\end{aligned}$$

と計算できる.

2.3 量子相関を用いる場合の最適化

はじめに一度のみ相関を使う場合との比較を行う．量子系 $\mathbb{C}^4 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ 上の状態族 $\{\rho^{\otimes 2}_{r,\theta}\}$ における，パラメータ r を推定する問題を考える．この場合群 SU(2) の要素 U による，作用 $U^{\otimes 2}$ の下でこの状態族は閉じていることが示せる．それゆえ，先の節と同種の議論により，群共変的測定の中で，$J^M_{r,\theta;r}$ を最大化する問題に帰着できる．詳しくは文献 [2] の付録を参照のこと．なお，先の場合と異なり，$J^M_{r,\theta;r}$ を最大化する共変的測定 M は r に依存すると思われる.

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ は $\left\{|+,+\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle+|-,+\rangle), |-,-\rangle\right\}$ で張られる空間 $\mathcal{H}_s$ と $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle-|-,+\rangle)$ で張られる

1 次元空間 $\mathcal{H}_a$ の直和 $\mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_a$ に既約分解できる．例えば，極めて簡単な群共変的測定として，$\mathcal{H}_s$ と $\mathcal{H}_a$ への射影 P_s P_a からなる 2 値測定 M_1 がある．この測定の場合，P_s に対応する測定値が得られる確率は $\frac{3+r^2}{4}$ であり，P_a に対応する測定値が得られる確率は $\frac{1-r^2}{4}$ である．従って，Fisher 情報量 $J^{M_1}_{r,\theta}$ は $\frac{4r^2}{(1-r^2)(3+r^2)}$ である．

もちろん，この問題での推定精度の限界は群共変的測定の中での $J^{M}_{r,\theta}$ の最大値である．この最大化問題を議論するには，文献 [2] の付録の議論より，$\mathcal{H}_a$ は 1 次元であるので，$\mathcal{H}_s$ 上の状態 ρ_s について決まり測定値集合が $\mathrm{SU}(2)$ と $\{a\}$ の和集合 $\mathrm{SU}(2)\coprod\{a\}$ となる測定 M^{ρ_s}:

$$M^{\rho_s}(\,dg) = 3g^{\otimes 2}\rho_s(g^{\otimes 2})^*\nu(\,dg), \quad M^{\rho_s}(a) = P_a$$

について，$J^{M^{\rho_s}}_{r,\theta}$ の最大値を議論することになる．この測定ははじめに測定 $\{P_a, P_s\}$ を行い，P_s に対応する測定値が得られたときは，測定 $3g^{\otimes 2}\rho_s(g^{\otimes 2})^*\nu(\,dg)$ を行うことを意味する．

しかし，この最大化問題は難しいので，以下では ρ_s が $|+,+\rangle$ の場合 (M_2), ρ_s が $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle)$ の場合 (M_3), ρ_s が $|-,-\rangle)$ の場合 (M_4), の場合，さらに，$M_5 = \frac{1}{3}(M_2 + M_3 + M_4)$ の場合を比較する．M_5 は $\mathrm{SU}(2)$ の不変測度に対応する確率で $g \in \mathrm{SU}(2)$ を選び，基底 $g^{\otimes 2}|+,+\rangle, g^{\otimes 2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle)$, $g^{\otimes 2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle), g^{\otimes 2}|-,-\rangle$ に対応する測定を行うことで実現できる．ここで扱った測定 M_2, M_3, M_4, M_5 はそれぞれ，対応する状態が群の表現に関して不変部分群 S_1(1 次元円周) を持つので，測定値集合は $\mathrm{SU}(2) = S^3$(3 次元球面) を S_1 で割って得られる集合 $S^3/S^1 = S^2$(2 次元球面) となる．不変部分群が単位元だけとなる状態 ρ_s に対応する測定の場合は測定値集合は群 $\mathrm{SU}(2)$ となる．

M_2 の場合は $\langle +,+|\rho_{r,\theta}|+,+\rangle = \frac{1}{4}(1 + r\cos 2\theta_1)^2$ となるので，

$$\begin{aligned} J^{M_2}_{r,\theta;r} =& \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{d}{dr}\log(1 + r\cos 2\theta_1)^2\right)^2 \\ & \frac{(1 + r\cos 2\theta_1)^2\, 3\sin\theta_1\cos\theta_1}{4\pi}\, d\theta_1\, d\theta_2 \\ & + \left(\frac{d}{dr}\log\left(\frac{1-r^2}{4}\right)\right)^2 \frac{1-r^2}{4} \\ =& \frac{1}{1-r^2} \end{aligned}$$

と計算できる．ちなみに，2.1 で議論したパラメータ θ が既知である場合の Fisher 情報量は考えている量子系が $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ なので，2 倍の $\frac{2}{1-r^2}$ となる．M_4 については M_2 と実質的に同じである．

一方，M_3 の場合は $\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle +,-| + \langle -,+|)\,\rho_{r,\theta}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle) = \frac{1}{4}\left(1 + r^2(-1 + 2\sin^2 2\theta_1)\right)$ となるので，

$$\begin{aligned} & J^{M_3}_{r,\theta;r} \\ =& \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{d}{dr}\log\left(1 + r^2(-1 + 2\sin^2 2\theta_1)\right)\right)^2 \\ & \frac{\left(1 + r^2(-1 + 2\sin^2 2\theta_1)\right)\, 3\sin\theta_1\cos\theta_1}{4\pi}\, d\theta_1\, d\theta_2 \\ & + \left(\frac{d}{dr}\log\left(\frac{1-r^2}{4}\right)\right)^2 \frac{1-r^2}{4} \\ =& \frac{1}{1-r^2} - \frac{3}{r^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}r^3\sqrt{1+r^2}}\log\left(\frac{\sqrt{1+r^2}+\sqrt{2}r}{\sqrt{1+r^2}-\sqrt{2}r}\right) \end{aligned}$$

と計算できる．したがって，M_5 の Fisher 情報量 $J^{M_5}_{r,\theta;r}$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned} J^{M_5}_{r,\theta;r} =& \frac{1}{1-r^2} - \frac{1}{r^2} \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}r^3\sqrt{1+r^2}}\log\left(\frac{\sqrt{1+r^2}+\sqrt{2}r}{\sqrt{1+r^2}-\sqrt{2}r}\right) \end{aligned}$$

ここで M_0 を先の相関を用いない測定を 2 度行うことによる測定として，上記の測定による Fisher 情報量を比較すると以下のグラフが得られる．すなわち，以下のグラフでは M_0 は $J^{M_{opt}}_{r,\theta;r}$ の 2 倍を表す．なお，これらを直接比較しても，r が 1 に近いときはどれも無限大なので，これらに $1-r$ を掛けたものを以下のグラフで表した．

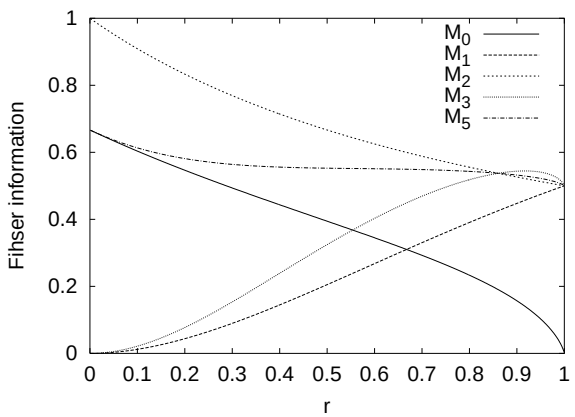

図 1: Fisher 情報量についての M_0, M_1, M_2, M_3, M_5 の比較

ここまでは，用いる量子相関の数を 2 に限定していたが，原理的には準備された全系にまたがる相関を用いて推定することが可能である．このような場合の推定を Keyl, Werner[3] は $\mathrm{SU}(2)$ の表現の既約成分に射影する測定で行うことを考えた．正確には，彼らは一般の次元での固有値推定問題を扱ったので，$\mathrm{SU}(n)$ の表現論を用いた．彼らは，そのときの裾確率に注目し，その漸近的な減少率に評価した．彼らが導出した減少率は漸近的には最適である [4]．

2.4 量子効果が表れる推定の実現に向けて

現実の測定で量子相関を用いた推定効果を検証するには，不完全な測定について，きちんと議論する必要がある．先の定式化では n 個の粒子を独立に準備することを前提にしていたが, 実際の粒子発生器 (光源) から光子を n 個の正確に発生させることはきわめて困難であり, 光子の個数を制御できる変数とみることはできない. むしろ現実の系では, 光子を発生させる時間が制御可能な変数と見るべきである．この場合, 個々の粒子の発生が独立であるとみなすと, 一定時間に発生される粒子の個数 n はポアソン分布

$$e^{-t}\frac{t^n}{n!} \tag{9}$$

に従うと考えられる．発生時間を長くさせるに従い, 発生する粒子の個数の期待値 t が比例して大きくなる.

さらに, 測定に対応する POVM $M=\{M_i\}$ は必ずしも $\sum_i M_i = I$ を満たすわけでなく, むしろ一般には

$$\sum_i M_i \leq I \tag{10}$$

で表されるものであると考える方が自然である．なぜなら，測定器でカウントできない場合があるからである．このような問題設定では，文献 [2] で詳しく述べられるように、最尤法を用いたときの MSE はほぼ Fisher 情報量の逆数と一致する．それゆえ、t(MSE) または (Fisher 情報量)$/r$ に注目することになる．前者は単位時間当りの誤差で，後者は単位時間当りの情報量と見ることができる.

ここで，量子 2 準位系の固有値推定で 2.3 節で議論した $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ での測定 $\{0.5P_a\}$ を用いた場合 (以下 M_1' と記す) と，節 2.2 で扱った量子相関を用いない共変的測定を完全に行った場合 (以下 M_0 と記す) を比較しよう，そのためには，$\frac{0.5r^2}{1-r^2}$ と $2J^{M_{opt}}_{r,\theta;r} = \left(-\frac{2}{r^2}+\frac{1}{r^3}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right)$ を比較することになる．これを比較した図が以下である．ここでも先と同様に，r が 1 に近い場合は無限大になるので，これらに $1-r$ を掛けたものをグラフに表した．この場合，$r \geq 0.85$ のとき，M_1' の方が優れている.

0.5 という数字は決して不可能な数字ではないことを考えると，この実験は十分可能であると考えられる．事実，既に Hendrych, Dusek, Filip, Fiurasek [5] によって測定 $\{\alpha P_a, \alpha P_s\}$ を用いて固有値を推定する実験はなされている．しかし，彼らの実験では，このような測定でも固有値が推定可能であるということに主眼が置かれており，どの程度の精度が保証される推定であるか十分には議論されていない．もちろん，本稿で述べたような量子相関を用いることのメリットという視点も全く議論されていない．今後，この測定を実現することで，量子相関を用いることにより，推定精度が向上することが実証されることが期待される．

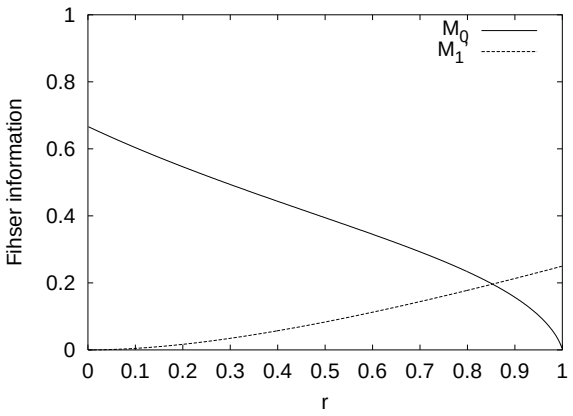

図 2: Fisher 情報量についての M_0 と M_1' 比較

3 結論

量子相関を用いない場合の推定限界を緻密に評価し，量子効果が表れる推定が現実の実験で実現可能であることを述べてきた．本稿を読んだ読者のうち，一人でも多くの人が，このような実験に興味を持ち，推定においても量子効果が実証されることを期待する．

謝辞

東京工業大学総合理工学研究科の宇佐見康二氏には文献 [5] をご教示頂くとともに、有益なコメントを頂きました．

参考文献

[1] 林正人, 松本啓史, 量子系における統計的推測の最近の発展, 日本応用数理学会誌, Vol. 11, No. 3 Sep. 27-48, (2001).

[2] 林 正人, 量子系の統計的推測と量子相関, 物性研究, 掲載予定 (2003).

[3] K. Keyl R. F. Werner, *Phys. Rev.* A, **64**, 052311, (2001); LANL eprint quant-ph/0102027.

[4] H. Nagaoka, "On the Parameter Estimation Problem for Quantum Statistical Models," 第１２回情報理論とその応用学会シンポジウム予稿集, 577-582 (1989).

[5] M. Hendrych, M. Dusek, R. Filip, and J. Fiurasek, "Simple optical measurement of the overlap and fidelity of quantum states: An experiment," quant-ph/0208091 (2002).