2001 年情報論的学習理論ワークショップ
2001 Workshop on Information-Based Induction Sciences (IBIS2001)
Tokyo, Japan, July 30 - August 1, 2001.

量子仮説検定における漸近的に最適な測定

Asymptotic optimal measurement in the quantum hypothesis testing

林 正人*
Masahito Hayashi

Abstract: In this talk, we give another proof of quantum Stein's lemma by calculating the information spectrum. And we propose a method of constructing an asymptotic optimal measurement in the sense of Stein's lemma. In the case of that the physical system of interest is described by an finite dimensional Hilbert space $\mathcal{H}$, we propose a projection measurement characterized by the irreducible representation theory of the general linear group $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$. Specially, in spin 1/2 system, it is realized by a simultaneous measurement of the total momentum and a momentum of a specified direction. In the infinite dimensional case, generally, such an asymptotic optimal measurement whose physical interpretation is clear, isn't known. In the case of that the hypotheses are written by quantum gaussian states, we propose a projection measurement whose physical interpretation is clear.

Key Words: quantum hypothesis testing, Stein's lemma, information spectrum, group representation theory, simultaneous measurement of the total momentum and a momentum of a specified direction

1 はじめに

本稿では, Stein の補題型の量子状態の仮説検定で漸近的に最適な測定を提案する. 量子版 Stein の補題 (定理 1) は以下に述べるように日合-Petz[1] 及び小川-長岡 [2] により得られた結果を組み合わせることにより得られるが, 本稿では, その量子版 Stein の補題から得られる限界を達成する具体的な検定の構成方法を提案する. 特に対象となる物理系が Spin 1/2 系となる場合, 漸近的に最適な検定を構成するには n 個のサンプルからなる合成系上の全角運動量とある特定方向の角運動量を同時に測定すれば良いことを示す.

本稿では検定の対象となる仮説 (帰無仮説) が「未知状態が状態 ρ である.」であり, 対立する仮説が「未知状態が σ である.」という仮説検定を扱う. 帰無仮説が正しいにもかかわらず帰無仮説を棄却してしまう誤りを第 1 種の誤りと呼び, 帰無仮説が誤っているにもかかわらず, 帰無仮説を受容する誤りを第 2 種の誤りと呼ぶ. 仮説検定ではこの 2 種の誤りを犯す確率をいかに押えるかが問題になる. 一般に第 1 種の誤り確率と第 2 種の誤り確率を同時に最小化することは不可能である.

本稿で扱う問題では未知状態のサンプルが複数 n 個, 独立に準備された状況の下での漸近的な仮説検定を考える. この型の仮説検定問題について日合-Petz[1] 及び小川-長岡 [2] により以下の量子版 Stein の補題が知られている.

定理 1 未知状態のサンプルが複数 n 個, 独立に準備された状況の下で第 1 種の誤り確率が $\epsilon > 0$ 以下となる条件の下で第 2 種の誤り確率を最小値を $\beta_{n,\epsilon}$ とすると, 以下の式が成立する.

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \beta_{n,\epsilon} = D(\rho\|\sigma). \tag{1}$$

ここで $D(\rho\|\sigma)$ は量子相対エントロピーと呼ばれる量で, $D(\rho\|\sigma) := \mathrm{Tr}\, \rho(\log \rho - \log \sigma)$ で定義される.

(1) の $\geq$ の部分は長岡により予想され , 日合-Petz[1] により初めて示された.($\mathcal{H}$ が無限次元の場合は Petz[3] により示された.) (1) の $\leq$ の部分については小川-長岡 [2] により示された.

本稿の目的は第 1 種の誤り確率が漸近的に 0 に近づき第 2 種の誤り確率の rate が漸近的に量子相対エントロピー $D(\rho\|\sigma)$ となる (すなわち (4) を満たす) 検定を構成するとともに定理 1 の別証明を与えることにある. そのために以下では記号の準備を行う.

*理化学研究所 脳科学総合研究センター 脳数理研究チーム〒 351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1 Tel: 048-467-9664 Fax: 048-467-9693
e-mail masahito@brain.riken.go.jp
Laboratory for Mathematical Meuroscience, Brain Science Institute, RIKEN Wako, Saitama, 351-0198, JAPAN

対象となる量子系の表現空間を $\mathcal{H}$ とすると, その量子系での状態は $\mathcal{H}$ 上の密度演算子 ($\mathcal{H}$ 上の非負定値 かつ Trace が 1 となる自己共役作用素) で記述される.(密度演算子の集合を $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で表すことにする.) そしてその量子系での測定は $\mathcal{H}$ 上の非負定値作用素による単位の分解 $\{M_i|\sum_{i=1}^k M_i = \mathrm{I}\}$ で記述される. 以下ではこの単位の分解のことを測定と呼ぶことにする. (正作用素値測度 (Positive Operator Valued Measure) とも呼ばれ POVM と略されることもある.) そして, 状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ を測定 $\{M_i|\sum_{i=1}^k M_i = \mathrm{I}\}$ で測定したときに得られる確率分布 P_ρ^M は次で与えられる: $P_\rho^M(i) := \mathrm{Tr}\, M_i\rho$. 特に帰無仮説を $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ とし, 対立仮説を $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ とする仮説検定での検定は測定値が 2 つとなる測定を考えればよい. この場合, 帰無仮説を受容する事象に対応する非負定値作用素 A を指定するだけで記述できる. 帰無仮説を棄却する事象に対応する非負定値作用素は $\mathrm{I}-A$ となる.

次に表現空間が $\mathcal{H}$ となる量子系が n 個, 独立に並べられた量子系を考える. この量子系の表現空間は $\mathcal{H}^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}}_{n}$ となり, $\mathcal{H}$ 上の状態 ρ が n 個, 独立に並べられた状態は n 次テンソル積状態 $\rho^{\otimes n} := \underbrace{\rho\otimes\cdots\otimes\rho}_{n}$ で表される. 従って n 個の独立なサンプルに対する測定は表現空間 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の非負定値作用素による単位の分解 $\{M_i^n|\sum_{i=1}^{k_n} M_i^n = \mathrm{I}\}$ で記述される. 以下では n 次テンソル積状態の系列 $\{\rho^{\otimes n}\}_{n=1}^\infty$ を $\vec{\rho}$ で表す. $\mathcal{H}$ 上のの自己共役作用素 X に対して, i 番目のテンソル成分のみが X になり他のテンソル成分が I となる物理量を X_i と書き自己共役作用素 $\sum_i X_i$ を $X^{(n)}$ で表す. 特に本稿では帰無仮説を $\rho^{\otimes n} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes n})$ とし, 対立仮説を $\sigma^{\otimes n} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^{\otimes n})$ とする仮説検定を問題としているがこの仮説検定では検定は帰無仮説を受容する事象に対応する $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上の非負定値作用素 A^n で表される. したがってこれらの記号を用いて検定 A^n を行ったときの第 1 種の誤り確率 $\alpha_n(A^n)$ 及び第 2 種の誤り確率 $\beta_n(A^n)$ は以下で与えられる.

$$\alpha_n(A^n) := \mathrm{Tr}\,\rho^{\otimes n}(\mathrm{I}-A^n), \quad \beta_n(A^n) := \mathrm{Tr}\,\sigma^{\otimes n}A^n.$$

長岡 [4] にならい次の 2 つ量を考える

$$B(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) := \sup\left\{\lambda \left| \begin{array}{l} \exists \vec{A}, \lim_{n\to\infty}\alpha_n(A^n) = 0, \text{ かつ} \\ \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\beta_n(A^n) \le -\lambda \end{array} \right.\right\},$$

$$C(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) := \sup\left\{\lambda \left| \begin{array}{l} \exists \vec{A}, \limsup_{n\to\infty}\alpha_n(A^n) < 1, \text{ かつ} \\ \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\beta_n(A^n) \le -\lambda \end{array} \right.\right\}.$$

そして測定の系列 $\vec{M} := \{M^n\}$ に対して次の量を定義する.

$$\underline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) = \sup\left\{\lambda \left| \lim_{n\to\infty} P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}}{P_{\sigma^{\otimes n}}^{M^n}} < \lambda\right\} = 0\right.\right\},$$

$$\overline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) = \inf\left\{\lambda \left| \lim_{n\to\infty} P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}\left\{\frac{1}{n}\log\frac{P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}}{P_{\sigma^{\otimes n}}^{M^n}} > \lambda\right\} = 0\right.\right\}.$$

韓 [5] の第 4 章の結果を用いると以下のことが示せる.

$$B(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) = \sup_{\vec{M}}\underline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) \le C(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) = \sup_{\vec{M}}\overline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}). \tag{2}$$

本稿では以下の (3) を示すことにより $B(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) = C(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) = D(\rho\|\sigma)$ を示し, 定理 1 を示す.

$$\sup_{\vec{M}}\underline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) = \sup_{\vec{M}}\overline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) = D(\rho\|\sigma). \tag{3}$$

そして任意の $\epsilon > 0$ に対して以下の条件 (4) を満たす検定の系列 $\{A^n\}_{n=1}^\infty$ を構成する.

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(A^n) = 0, \quad -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\beta_n(A^n) = D(\rho\|\sigma) - \epsilon. \tag{4}$$

以下では (4) を満たす検定の系列 $\{A^n\}$ を Stein の補題の意味で最適な検定 と呼ぶことにする. なお韓 [5] によると, 任意の $\epsilon > 0$ を固定した上で, 各測定 $M^n := \{M_i^n\}_{i=1}^{k_n}$ の測定値 i に以下のように受容 / 棄却を対応させる検定の系列 $\vec{A} := \{A_n\}$ について (5) が示せる.

- $\frac{1}{n}\log\frac{P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}(i)}{P_{\sigma^{\otimes n}}^{M^n}(i)} \ge \underline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) - \epsilon$ ならば ρ を受容.
- $\frac{1}{n}\log\frac{P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}(i)}{P_{\sigma^{\otimes n}}^{M^n}(i)} < \underline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) - \epsilon$ ならば ρ を棄却.

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(A^n) = 0, \ -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\beta_n(A^n) = \underline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) - \epsilon. \tag{5}$$

したがって以下の条件 (6) を満たす測定の系列 $\vec{M} := \{M^n\}_{n=1}^\infty$ が構成できれば (4) を満たす検定の系列が構成できる.

$$\underline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}) = D(\rho\|\sigma). \tag{6}$$

なお一般に $D^M(\rho\|\sigma)$ で測定 M を行ったときに得られる確率分布 P_ρ^M と P_σ^M の間の相対エントロピーを表すことにすると一般に以下の式が成立する.

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}D^{M^n}(\rho^{\otimes n}\|\sigma^{\otimes n}) \ge \underline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma})$$
$$nD(\rho\|\sigma) = D(\rho^{\otimes n}\|\sigma^{\otimes n}), \quad D(\rho\|\sigma) \ge D^M(\rho\|\sigma). \tag{7}$$

なお (7) の第 2 式において等号が成立する測定 M が存在するための必要十分条件は ρ と σ が可換であることである.

したがって (6) において $\leq$ は自明であり, 必要なことは (6) において $\geq$ となる測定の系列を構成することである. 以下 (6) を満たす測定の系列のことを Stein の補題の意味で最適な測定 と呼ぶことにし, そのような測定の性質について論じる.

以下では対象となる量子系の表現空間 $\mathcal{H}$ が有限次元のときに表現論的手法を用いて (3) を示すことから, 定理 1 を示し, Stein の補題の意味で最適な測定の構成方法を提案する. なおここで提案する測定の系列は 林 [6] と同じく対立仮説 σ にのみ依存し, 帰無仮説 ρ の形には依存しない.

2 準備

以下, 主に各 M_i が射影になる測定 M のみを扱い, そのような測定を射影測定と呼ぶことにする. 状態 σ と射影測定 $M = \{M_i\}$ について $\sigma M_i = \sigma M_i$ となるときこれらは互いに可換であると呼び, 2 つの射影測定 $M = \{M_i\}, E = \{E_j\}$ が $M_i E_j = E_j M_i$ となるとき可換と呼ぶことにする. さらに 2 つの測定 $M = \{M_i\}, E = \{E_j\}$ が次の条件を満たすとき $M \geq E$ と記すことにする: $E = \{E_j\}$ 各添字 j に対して測定 $M = \{M_i\}$ の添字の部分集合 B_j が取れて $E_j = \sum_{i \in B_j} M_i$ となる. 互いに可換な射影測定 M, E に対しては同時にその 2 つの測定を行うことが出来る. 具体的には新たな射影測定 $E \times M := \{M_i E_j\}$ を定義することができ, その射影測定 $E \times M$ を行えば良い. このとき $E \times M \geq E, M$ となることが容易に示される.

そして自己共役作用素 X に対して X のスペクトル分解を射影測定と見なしたものを $E(X)$ で表す. 特に $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対しては $E(\sigma) = E(\log \sigma)$ となる. さらに射影測定 $M = \{M_i\}$ の条件付き期待値 $\mathcal{E}_M$ を状態から状態への写像として $\mathcal{E}_M : \rho \mapsto \sum_i M_i \rho M_i$ で定義する.

補題 2 ρ, σ が射影測定 E と可換であるとする. このとき以下の式が成立する.

$$\inf\{\beta(A) \,|\alpha(A) \leq \epsilon\}$$
$$= \inf\{\beta(A) \,|\exists M \geq E, M \geq \{I - A, A\}, \quad \alpha(A) \leq \epsilon\}.$$

上の補題から ρ, σ が射影測定 E と可換であるときには帰無仮説 ρ 対立仮説 σ の仮説検定に関しては $M \geq E$ となる射影測定 M のみ考えればよい.

補題 3 E, M を $M \geq E$ となる射影測定とし, 状態 ρ が射影測定 E と可換とする. このとき以下の式が成立する.

$$\mathrm{Tr}\,\rho(\log\rho - \log\mathcal{E}_M(\rho))^2 \leq 2(\log w(E))^2. \tag{8}$$

証明 $a_i := \mathrm{Tr}\, E_i \rho E_i, \rho_i := \frac{1}{a_i} E_i \rho E_i$, とする. このとき, $\rho = \sum_i a_i \rho_i, \mathcal{E}_M(\rho) = \sum_i a_i \mathcal{E}_M(\rho_i)$ となる. したがって以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,\rho(\log\rho - \log\mathcal{E}_M(\rho))^2 \\
&= \sum_i a_i \,\mathrm{Tr}\,\rho_i(\log\rho_i - \log\mathcal{E}_M(\rho_i))^2 \\
&\leq \sup_i \mathrm{Tr}\,\rho_i(\log\rho_i - \log\mathcal{E}_M(\rho_i))^2 \\
&\leq \sup_i \mathrm{Tr}\,\rho_i 2\left((\log\rho_i)^2 + (\log\mathcal{E}_M(\rho_i))^2\right) \\
&= 2\sup_i \mathrm{Tr}\,\rho_i(\log\rho_i)^2 + \mathrm{Tr}\,\mathcal{E}_M(\rho_i)(\log\mathcal{E}_M(\rho_i))^2 \\
&\leq 4(\log\dim E_i)^2.
\end{aligned}$$

なお, 最後の変形では補題 4 を用いた. よって (8) を得た. □

補題 4 長岡 *[7],* 大澤 *[8]* $k \geq 3$ のとき以下の式が成り立つ.

$$(\log k)^2 = \max\left\{ \sum_{i=1}^k p_i(\log p_i)^2 \,\middle|\, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^k p_i = 1 \right\}. \tag{9}$$

証明 (9) の右辺を a_k とし, 帰納法で示す.$k = 3$ のときは計算により (9) が示せる. また, $a_k \geq (\log k)^2$ も自明. 帰納法の仮定と $a_k \geq (\log k)^2$ となることから, $a_k = \sum_{i=1}^k p_i(\log p_i)^2$ となる p は $p_i > 0 (i = 1, \ldots, k)$ の場合に限られる. したがってここで Lagrange の未定乗数法が使え, 未定乗数を λ とすると, $(\log p_i)^2 + 2\log p_i - \lambda = 0$ を得る. この条件と $\sum_i p_i = 1$ から, 計算により, $p_i = 1/k$ が得られ,(9) が得られる. □

補題 5 $\mathcal{H}$ の次元を k とする任意の状態と $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ 任意の射影測定 M について $\rho \leq \mathcal{E}_M(\rho) k$ が成立する.

証明 ρ が純粋状態 $|\phi\rangle\langle\phi|$ のときについて示せばよい.

$$\begin{aligned}
&\langle\psi\,|(\mathcal{E}_M(|\phi\rangle\langle\phi|)k - |\phi\rangle\langle\phi|)\,|\psi\rangle \\
&= k\sum_{i=1}^k \langle\psi|M_i|\phi\rangle\langle\phi|M_i|\phi\rangle - \left|\sum_{i=1}^k \langle\psi|M_i|\phi\rangle\right|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

よって題意が示せた. □

補題 6 ρ を射影測定 E と可換な状態とする. そして $M \geq E$ となる射影測定 M に対して $\rho \leq \mathcal{E}_M(\rho) w(E)$ が成立する. さらに $0 < t \leq 1$ となる t について $(0, \infty)$ で $u \to -u^{-t}$ が作用素単調関数である (日合-柳 [10]) ことから ρ^{-1} が有界であるときには $w(E)^t \rho^{-t} \geq (\mathcal{E}_M(\rho))^{-t}$ が得られる.

証明 $\rho \leq \mathcal{E}_M(\rho) w(E)$ の証明は補題 3 と同じように補題 5 に帰着できる. □

3　$\rho^{\otimes n}, \sigma^{\otimes n}$ と表現論との関連

この節で用いる一般線形群の既約表現の知識については岩堀 [9] を参照のこと. 一般に表現空間の直和分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_k$, から自然に表現空間 $\mathcal{H}$ 上の射影測定 $\{P_{\mathcal{H}_i}\}_{i=1}^k$ を考えることが出来る. $P_{\mathcal{H}_i}$ は $\mathcal{H}_i$ への射影を表す. 群が 表現空間 $\mathcal{H}$ に作用していたとき, 表現の既約分解に対応する射影測定を考えることができる. ただし,1 つの群の表現が与えられたときに一般には (特に既約成分の中に同じ型の表現が含まれているときには) その既約分解に対応する直和分解は一意には決まらない. 特に $\mathcal{H}$ が有限次元であるときには, 一般線形群 $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ は自然にそのテンソル積空間 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ へ作用する. この表現の既約分解に対応する直和分解から構成される射影測定を $Ir^{\otimes n} := \{Ir_i^{\otimes n}\}$ と表すことにする. このとき $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の表現の既約分解に対応する直和分解は一意には決まらないので, ここで定義した射影測定 $Ir^{\otimes n}$ についても一意には決まらない.

次に添字 j でそれぞれの $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の既約成分に現れる群 $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の既約表現の種類を表すことにする. そして, 既約分解 $Ir^{\otimes n} := \{Ir_i^{\otimes n}\}$ 既約成分 $Ir_i^{\otimes n}$ のうち, 群 $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の表現が添字 j で表される型の既約表現になっているものの添字 i の集合を D_j で表す. ここで $IR^{\otimes n} := \{IR_j^{\otimes n} := \sum_{i \in D_j} Ir_i^{\otimes n}\}$ で射影測定 $IR^{\otimes n}$ を定義するが, この定義は既約分解に対応する射影測定 $Ir^{\otimes n}$ の取り方に依存しない.

補題 7 $\mathcal{H}$ が有限次元であり, ρ を $\mathcal{H}$ 上の状態とする. このとき, 射影測定 $Ir^{\otimes n}$ とテンソル積状態 $\sigma^{\otimes n}$ は可換となる.

証明　状態 σ が対して σ^{-1} が存在するとき, すなわち $\sigma \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ となるときには, Schur の補題により補題の主張は自明である. σ^{-1} が存在しないときには, $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の列 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ で $\sigma_i \to \sigma$ as $i \to \infty$ となるものを考える. $\sigma_i^{\otimes n} \to \sigma^{\otimes n}$ as $i \to \infty$ となり, $Ir^{\otimes n}$ は $\sigma_i^{\otimes n}$ と可換であるから $Ir^{\otimes n}$ と $\sigma^{\otimes n}$ も可換であることが言える. □

補題 8 $w(Ir^{\otimes n})$ は $(n+1)^{k-1}$ 以下である.

証明　表現論的考察から $w(Ir^{\otimes n})$ は k 次の $\mathcal{H}$ の対称テンソル積空間の次元と一致する. ${}_kH_n$ で k 個のものから n 個のものを選ぶときの重複組合わせを表すとすると, 次の式を得る. $w(Ir^{\otimes n}) = {}_kH_n = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n} = {}_{n+1}H_{k-1} \leq (n+1)^{k-1}$. □

4　$D(\rho\|\sigma) \geq \overline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma})$ の証明

$\dim \mathcal{H} = k$ の場合のついて考える. このとき σ^{-1} が存在すると仮定しても一般性を失わない. $\sigma^{\otimes n}, \rho^{\otimes n}$ はともに射影測定 $Ir^{\otimes n}$ と可換である. したがって, 帰無仮説 $\rho^{\otimes n}$ 対立仮説 $\sigma^{\otimes n}$ の仮説検定を考えるには測定は $M^n \geq Ir^{\otimes n}$ となる射影測定に限ることができる. ここで確率分布 $P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}$ の下での確率変数 $\frac{1}{n}\log \frac{P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}}{P_{\sigma^{\otimes n}}^{M^n}}$ の挙動が問題になる. まずはじめに $\frac{1}{n}\log P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}$ の挙動について以下の式が成立する.

$$
\begin{aligned}
&\sum_i P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}(i)\left(\frac{1}{n}\log P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}(i) - \operatorname{Tr}\rho\log\rho\right)^2 \\
=&\operatorname{Tr}\mathcal{E}_{M^n}(\rho^{\otimes n})\left(\frac{1}{n}\log\mathcal{E}_{M^n}(\rho^{\otimes n}) - \operatorname{Tr}\rho\log\rho\right)^2 \\
=&\operatorname{Tr}\rho^{\otimes n}\left(\frac{1}{n}\log\mathcal{E}_{M^n}(\rho^{\otimes n}) - \frac{1}{n}\operatorname{Tr}\rho\log\rho\right)^2 \\
\leq&2\operatorname{Tr}\rho^{\otimes n}\left(\frac{1}{n}\log\mathcal{E}_{M^n}(\rho^{\otimes n}) - \frac{1}{n}\log\rho^{\otimes n}\right)^2 \\
&+2\operatorname{Tr}\rho^{\otimes n}\left(\frac{1}{n}\log\rho^{\otimes n} - \operatorname{Tr}\rho\log\rho\right)^2 \\
\leq&8\left(\frac{2(k+1)\log(n+1)}{n}\right)^2 \\
&+2\operatorname{Tr}\rho^{\otimes n}\left(\frac{1}{n}(\log\rho)^{(n)} - \operatorname{Tr}\rho\log\rho\right)^2.
\end{aligned}
$$

最後の $\leq$ は補題 3 に補題 8 を組み合わせることにより導かれる. 第 2 項については容易に 0 に収束することが確認できる. 従って確率変数 $\frac{1}{n}\log P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}$ は $\operatorname{Tr}\rho\log\rho$ に確率収束する. 次に $\frac{1}{n}\log P_{\sigma^{\otimes n}}^{M^n}$ の挙動について調べることにする. マルコフの不等式より一般の確率分布 p 上の確率変数 X について以下のことが導ける.

$$
\begin{aligned}
&p\{X \geq a\} \leq e^{-\Lambda(X,p,a)} \\
&\Lambda(X,p,a) := \sup_{0\leq t\leq 1}\left(at - \log\int e^{tX(\omega)}p(\,d\omega)\right).
\end{aligned}
$$

ここで以下の式を得る.

$$
\begin{aligned}
&\Lambda\left(-\log P_{\sigma^{\otimes n}}^{M^n}, P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}, an\right) \\
=&\sup_{0\leq t\leq 1} ant - \log\operatorname{Tr}\left(\mathcal{E}_{M^n}(\rho^{\otimes n})\left(\mathcal{E}_{M^n}(\sigma^{\otimes n})\right)^{-t}\right) \\
=&\sup_{0\leq t\leq 1} ant - \log\operatorname{Tr}\left(\rho^{\otimes n}\left(\mathcal{E}_{M^n}(\sigma^{\otimes n})\right)^{-t}\right) \\
\geq&\sup_{0\leq t\leq 1} ant - \left(t\log w(Ir^{\otimes n}) + \log\operatorname{Tr}\rho^{\otimes n}\left(\sigma^{\otimes n}\right)^{-t}\right) \\
=&\sup_{0\leq t\leq 1} n\left(at - t\frac{\log w(Ir^{\otimes n})}{n} - \log\operatorname{Tr}\rho\sigma^{-t}\right).
\end{aligned}
$$

$\geq$ は補題 6 から得られる. 一方, $a > -\operatorname{Tr}\rho\log\sigma$ のとき $\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq 1}\left(at - t\frac{(k+1)\log(n+1)}{n} - \log\operatorname{Tr}\rho\sigma^{-t}\right) > 0$ となる. 従って以下の式が得られる.

$$
-\operatorname{Tr}\rho\log\sigma \geq \inf\left\{\lambda \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} P_{\rho^{\otimes n}}^{M^n}\left\{-\frac{1}{n}\log P_{\sigma^{\otimes n}}^{M^n} > \lambda\right\} = 0\right\}.
$$

従って, 以下の式を得た.

$$D(\rho\|\sigma) \geq \overline{D}^{\vec{M}}(\vec{\rho}\|\vec{\sigma}). \tag{10}$$

5 Stein の補題の意味で最適な測定

これまでの議論から測定の系列 $\vec{M}$ が (6) を満たすための必要十分条件は確率変数 $-\frac{1}{n}\log P^{M^n}_{\sigma^{\otimes n}}$ が $-\operatorname{Tr}\rho\log\sigma$ に弱収束することである.

ここで M_n を $\sigma^{\otimes n}$ と可換かつ $M^n \geq Ir^{\otimes n}$ となるものをとれば以下の式が得られる. M^n の例としては $Ir^{\otimes n} \times E(\sigma^{\otimes n})$ があげられる.

$$\begin{aligned}
&\sum_i P^{M^n}_{\rho^{\otimes n}}(i)\left|\frac{1}{n}\log P^{M^n}_{\sigma^{\otimes n}}(i) - \operatorname{Tr}\rho\log\sigma\right| \\
&= \operatorname{Tr}\rho^{\otimes n}\left|\frac{1}{n}\log\sigma^{\otimes n} - \operatorname{Tr}\rho\log\sigma\right| \\
&= \operatorname{Tr}\rho^{\otimes n}\left|\frac{1}{n}(\log\sigma)^{(n)} - \operatorname{Tr}\rho\log\sigma\right|.
\end{aligned}$$

従って確率変数 $\frac{1}{n}\log P^{M^n}_{\sigma^{\otimes n}}$ は $\operatorname{Tr}\rho\log\sigma$ に弱収束する. よって (6) を満たすことが確かめられた. (6) を満たす測定の系列 $\vec{M}$ が存在することと (10) から (3) が示された.

しかしながら以下のようにここで構成した測定の系列 $\vec{M} = \{M^n\}$ よりももっと粗い測定の系列で (6) を満たすものが構成できる.

定理 9 有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の次元を k とし, σ を $\mathcal{H}$ 上の状態とする. このとき, $Ir^{\otimes n}\times E(\sigma^{\otimes n})$ と同じように射影測定 $M^n := IR^{\otimes n}\times E(\sigma^{\otimes n}) = \{IR^{\otimes n}_j E(\sigma^{\otimes n})_l\}_{j,l}$ についても (6) が成立する.

証明　以下 $\mathbf{Im}$ で線形写像の像となる線形空間を表すこととする. $i_1, i_2 \in D_j$ となる射影測定 $Ir^{\otimes n}$ の添字 i_1, i_2 に対して, $\mathbf{Im}\, Ir^{\otimes n}_{i_1}$ と $\mathbf{Im}\, Ir^{\otimes n}_{i_2}$ における $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の表現が同値であることから, 以下を満たす $\mathbf{Im}\, Ir^{\otimes n}_{i_1}$ から $\mathbf{Im}\, Ir^{\otimes n}_{i_2}$ へのユニタリ写像 U_{i_1,i_2} が取れる: 任意の $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して以下の式が成立する.

$$U_{i_1,i_2} Ir^{\otimes n}_{i_1} \rho^{\otimes n} Ir^{\otimes n}_{i_1} U^*_{i_1,i_2} = Ir^{\otimes n}_{i_2} \rho^{\otimes n} Ir^{\otimes n}_{i_2}.$$

ρ^{-1} が存在しない場合については補題 7 と同じ方法を用いると良い. したがって後に述べる補題 10 での条件が成立することからが (6) 成立する. □

補題 10 ρ, σ を $\mathcal{H}$ 上の状態とし, $\mathcal{H}$ 上の 2 つの測定 $M = \{M_i\} \geq E = \{E_j\}$, $E_j = \sum_{i\in B_j} M_i$ について考える. 以下の条件を満たすとき, 確率分布 P^M_ρ の下での確率変数 $\log\frac{P^M_\rho}{P^M_\sigma}$ の確率分布と確率分布 P^E_ρ の下での確率変数 $\log\frac{P^E_\rho}{P^E_\sigma}$ のの確率分布とは一致する : $i_1, i_2 \in B_j$ となる任意の E の添字 j と M の添字 i_1, i_2 に対して, $\frac{\operatorname{Tr} M_{i_1}\rho}{\operatorname{Tr} M_{i_1}\sigma} = \frac{\operatorname{Tr} M_{i_2}\rho}{\operatorname{Tr} M_{i_2}\sigma}$ が成立する.

特に Spin 1/2 系では $IR^{\otimes n}$ 及び $E(\sigma^{\otimes n}) = E((\log\sigma)^{(n)})$ は良く知られた物理量の測定に帰着できる. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ でパウリ行列を表し, 対立仮説が $\sigma = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + c\sigma_x)$ と書けるとする. すると, 射影測定 $IR^{\otimes n}$ は全角運動量 $(\sigma^{(n)}_x)^2 + (\sigma^{(n)}_y)^2 + (\sigma^{(n)}_z)^2$ の測定であり, 射影測定 $E(\sigma^{\otimes n})$ は x 方向の角運動量 $\sigma^{(n)}_x$ の測定である. この 2 つの物理量はよく知られているように可換であり, 理論的には同時測定が可能である.

6 量子ガウス状態の場合の Stein の補題の意味で最適な測定の構成

次に $\mathcal{H}$ が無限次元の場合の例として未知状態が表現空間 $L^2(\mathbb{R})$ 上の量子ガウス状態 (Yuen-Lax[11], Holevo[12]) $\rho_\xi := \frac{1}{\pi N}\int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{\frac{|\alpha-\xi|^2}{N}}\, d^2\alpha$ で与えられる場合の仮説検定について考える. ここで $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ はコヒーレント状態を表す. 特に以下では帰無仮説 ρ_θ 対立仮説 ρ_0 である場合の仮説検定を扱う. このとき量子相対エントロピー $D(\rho_\theta\|\rho_0)$ は $\|\theta\|^2\log\frac{N+1}{N}$ と計算できる. 帰無仮説, 対立仮説がともに量子ガウス状態であるときは適当なユニタリ変換により上記の形に変換できる. $\rho^{\otimes n}_\theta, \rho^{\otimes n}_0$ に対して適当なユニタリ変換 U_n を施すことにより以下のように出来る.

$$U_n\rho^{\otimes n}_\theta U^*_n = \rho_{\sqrt{n}\theta}\otimes\rho^{\otimes n-1}_0, \quad U_n\rho^{\otimes n}_0 U^*_n = \rho^{\otimes n}_0.$$

そして個数測定を $E(N) := \{|i\rangle\langle i|\}_{i=0}^\infty$ で表し, $L^2(\mathbb{R})^{\otimes n}$ 上の射影測定 $E(N)^n := \{U^*_n\left(|i\rangle\langle i|\otimes I^{\otimes n-1}\right)U_n\}_{i=0}^\infty$ を考える. そして任意の $\epsilon > 0$ に対して射影測定 $E(N)^n$ 用いて受容 / 棄却を決める以下で与える検定 $A(\epsilon)^n$ を考える.

- $\frac{i}{n} \geq \|\theta\|^2 - \frac{\epsilon}{\log\frac{N+1}{N}}$ ならば ρ_θ を受容.
- $\frac{i}{n} < \|\theta\|^2 - \frac{\epsilon}{\log\frac{N+1}{N}}$ ならば ρ_θ を棄却.

なお射影測定 $E(N)^n$ によって得られる測定値を i とした. ここで定義した検定 $A(\epsilon)^n$ について林 [13] での議論を用いると以下の式を得が得られる.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\alpha_n(A(\epsilon)^n) &= 0, \\
-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\beta_n(A(\epsilon)^n) &= \|\theta\|^2\log\frac{N+1}{N} - \epsilon.
\end{aligned}$$

実はこの測定の系列 $\overrightarrow{E(N)} := \{E(N)^n\}$ についても

$\underline{D}^{\overrightarrow{E(N)}}(\vec{\rho_\theta}\|\vec{\rho_0}) = D(\rho_\theta\|\rho_0)$ が示せる. なお $n=4$ のときの測定 $E(N)^4$ は以下の図 1 のように行えばよい. ここで $\boxed{E(N)}$ は個数測定器を表し, ξ は θ または 0 を表すこととする.

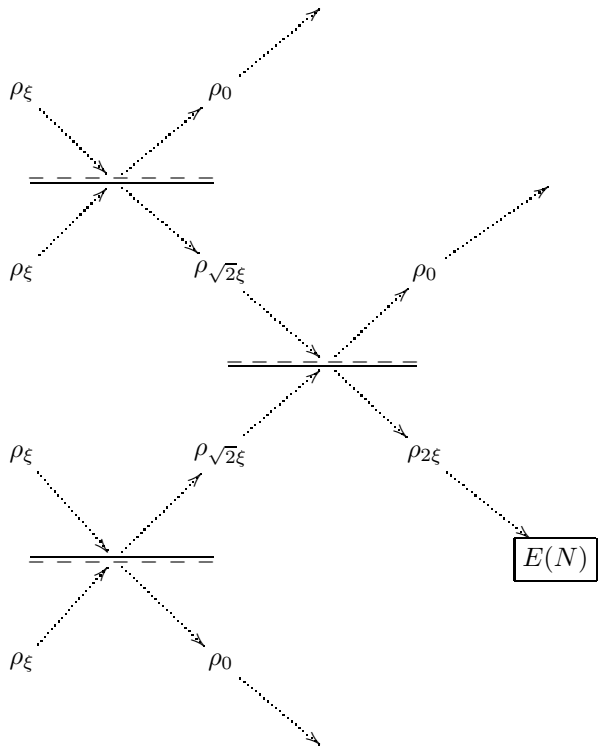

図 1

7 まとめ

有限次元である場合について表現論的手法を用いて情報スペクトルを求めることによって Stein の補題の別証明を行った. 従来の証明では順定理と強逆定理が全く別々に示されていたが, 今回の証明では情報スペクトル的手法を用いたので強逆定理での等号成立条件を見ることから順定理を導いた. ここで提案した測定は林 [6] で提案した測定よりもかなり粗いものであり, 日合-Petz[1] や林 [6] で提案された測定よりかなり物理的意味が分りやすいものになった言える. また §6 では量子ガウス状態の場合についてより直接的に検定を構成した.

謝辞

電気通信大学の長岡浩司助教授にはこの論文の誤りを指摘してくださりました. 長岡助教授と高エネルギー加速器研究機構の大澤進氏には, 補題 4 の証明を教えていただきました. 東京大学の小川朋宏博士にも, この論文の誤りを指摘していただきました. この場を借りて感謝します.

参考文献

[1] F. Hiai and D. Petz, Commun. Math. Phys. **143**, 99-114 (1991).

[2] T. Ogawa and H. Nagaoka, "Strong Converse and Stein's Lemma in the Quantum Hypothesis Testing," LANL e-print quant-ph/9906090, (1999). IEEE Trans. Inform. Theory, vol **IT**-46, pp. 2428-2433 (2000).

[3] D. Petz, J. Funct. Anal. **120**, 82-97 (1994).

[4] 長岡浩司, 量子仮説検定の漸近論について, シンポジウム「統計的推測理論とその情報論的側面」予稿集, 49-52, (1998).

[5] 韓 太舜, 「情報理論における情報スペクトル的方法」, 培風館, (1998).

[6] M. Hayashi, "Asymptotic Attainment for Quantum Relative Entropy," LANL e-print quant-ph/9704040 (1997). (to appear in J. Phys. A.)

[7] 長岡 浩司, Private communication, (2001).

[8] 大澤 進, Private communication, (2001).

[9] 岩堀長慶, 「対称群と一般線形群の既約表現論」, 岩波書店, (1978).

[10] 日合文雄, 柳研二郎, 「ヒルベルト空間と線型作用素」牧野書店, (1995).

[11] H. P. Yuen and M. Lax, IEEE trans. **IT-19**, 740 (1973).

[12] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory,* North-Holland, (1982).

[13] 林 正人, 量子推定論における漸近的大偏差型評価について, シンポジウム「統計的推測理論とその情報論的側面」予稿集, 53-82, (1998).