量子ガウス状態族の推定

林 正人　　理化学研究所 脳科学総合研究センター 脳数理研究チーム

1　はじめに

量子力学では注目する系に対して実験 (測定) を行ったときの結果 (測定値) を決定論的に予言することはできない. しかし, その実験が再現可能であるならば, 統計的 (確率的に) にその結果 (測定値) を予測することはできる. しかも, その予測が正しいか否かチェックするすることも可能である. なぜなら, 以下で述べるように量子力学における命題 (予測) は統計的アンサンブルに対してなされるものであるからである.

このように量子力学は統計理論としての側面があるにも関わらず, その統計的側面に注目した研究は以外と少ない. 本発表では量子力学系でのパラメータ推定に関する研究を後に導入する量子ガウス状態族の場合について紹介する. 量子状態ガウス状態族はある意味で古典系での正規分布族が果たした役割を果たすと期待されており, 量子系の統計的推測を考える上で, 基礎になると思われる.

量子力学では注目する物理系 (量子系) に Hilbert 空間 (系の表現空間, 以下 $\mathcal{H}$ と記す.) で記述され, 状態は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素で記述される. $\mathcal{H}$ 上の密度作用素とは $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線型作用素で positive semi-definite かつその Trace が 1 となるものである. そして, 測定は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素 I の positive semi-definite 作用素による分解 $\{M_i\}$ で記述される. この分解 $\{M_i\}$ は POVM (正作用素値測度) と呼ばれる. そして系が密度作用素 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対応する状態にあるとき POVM $\{M_i\}_{i=1}^k$ に対応する測定を行うとその測定値 $i = 1, \ldots, k$ は確率分布 $\mathrm{P}_\rho^M(i) := \mathrm{Tr}\,\rho M_i$ に従う. より一般には測定値のなす集合が Ω であるときは Ω 上の POVM は Ω の Borel 集合族 $\mathcal{B}(\Omega)$ から positive semi-definite 作用素 (のなす集合) への写像 M で以下の条件を満たすもので与えられる; $M(\emptyset) = 0, M(\Omega) = \mathrm{I}$. $B_i \cap B_j = \emptyset$ となる Borel 集合の列 $\{B_i\}$ に対して, $\sum_i M(B_i) = M(\cup_i B_i)$ が成り立つ.

したがって, 個々の状態に対して適切に密度作用素を対応させると, 個々の測定を行ったときの測定値を確率的に予言することができる. それでは, 個々の状態を密度作用素に対応させるにはどうしたら良いであろうか. 一般的にはこれまでの経験から対応する密度作用素を決定するという処方せんが用いられるが, 今までにない粒子発生装置や, 本来あるべき事前情報の一部が欠ていた場合などは, 実際にその状態にある系に対する測定を行った上で, その測定値の統計的分布から推測することになる. 本発表のテーマである量子力学系におけるパラメータ推定では, 状態に対応する未知の密度作用素が密度作用素族 $\mathcal{S} = \{\rho_\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ に含まれていることが既知の上で, 測定値から未知のパラメータ θ を推定することになる. (本発表では未知パラメータが 1 つの場合のみ扱う.)

このような方法を用いて状態の密度作用素を推測するためには, その状態にある系を十分たくさん準備する必要がある. そのため n 個のシステムにわたって同一の状態 ρ_θ が準備されることになる. このとき合成系 $\mathcal{H}^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n}$ 上の状態は密度作用素 $\rho^{\otimes n} := \underbrace{\rho \otimes \cdots \otimes \rho}_{n}$ で記述される (量子 n-i.i.d. 条件). 本発表では複数の系にまたがる量子測定も許した上で推定精度の限界を議論する.

2　推定の一次漸近論

まず始めに密度作用素の族 $\{\rho_\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d\}$ を考え, 未知パラメータ θ の推定を考える.

先に導入した量子 n-i.i.d. 条件を仮定すると, 推定量は量子系 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ に対する測定を表す POVM M^n (測定値集合 Ω_n) と Ω_n からパラメータ空間への写像 $\hat{\theta}_n$ の組 $(M_n, \hat{\theta}_n)$ で記述される. 多くの古典系と同様, 平均 2 乗誤差 (MSE) を誤差の規準にとることにする. しかし, 古典系と異なり一次漸近論の枠内でも, 異なるパラメータの MSE を同時の最小化することは不可能であり, それらの trade-off を扱う必要が生じる. そのため, 各パラメータの MSE の和に注目する. 特に一次漸近論では

$$\lim_{n\to 0} n \sum_i \int_{\Omega_n} (\hat{\theta}_n^i(\omega) - \theta^i)^2 \,\mathrm{Tr}\,\rho_\theta^{\otimes n} M_n(\,d\omega) \qquad (1)$$

を推定量の列 $\{(M_n, \hat{\theta}_n)\}$ について最小化を考え, その最小値を C_θ^Q とする. ただし, 超有効性の弊害を防ぐため, (1) の値の連続性及びその収束に局所一様性を満たす推定量の列 $\{(M_n, \hat{\theta}_n)\}$ のみ考えることにする.

しかしながら, ここで扱った POVM には各量子系間の相互作用を用いないと実現できないものが含まれている. そこで各系間の相互作用を用いず, 各系を個別に測定して, 古典的データ処理を行って, 推定するという問題を考えることとする. ただし, 各系に個別に行う測定は, それまでに行った測定の測定値に応じて適応的に選択できることとする. このような測定は以下の形の POVM で記述

される.

$$M^n = \{M^{(1)}_{\omega_1} \otimes \cdots \otimes M^{(n)}_{\omega_1,\dots,\omega_{n-1},\omega_n}\}_{(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\Omega^n},$$
$$M^{(k)}_{\omega_1,\dots,\omega_{k-1},\omega_k} = (M^{(k)}_{\omega_1,\dots,\omega_{k-1},\omega_k})^* \geq 0,$$
$$\int_\Omega M^{(k)}_{\omega_1,\dots,\omega_{k-1},\omega_k}\, d\omega_k = \mathrm{I} \quad (k = 1,\dots,n).$$

上記の条件を満たす POVM に限った場合の (1) の最小値を, C^{NQ}_θ と書くことにする. C^Q_θ と C^{NQ}_θ を比較する事によって, 各系間の相関を用いることによって, どれだけ推定精度が向上するか議論することができる.

さらに状態族 $\{\rho^{\otimes n}_\theta \in \mathcal{S})\mathcal{H}^{\otimes n})|\theta \in \Theta\}$ の C^{NQ}_θ を $C^{NQ,\otimes n}_\theta$ と記すことにすると, $C^Q_\theta = \lim_{n\to\infty} nC^{NQ,\otimes n}_\theta$ となる.

3 量子ガウス状態族の推定

以下, $|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |n\rangle, \cdots$ を正規直交基底とする Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ を考える. ($|n\rangle$ に n 次の Hermite 関数を対応させると $\mathbb{R}$ 上の 2 乗積分空間 $L^2(\mathbb{R})$ になる.) この Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ は振動数一定の光子からなる量子系の表現空間になる. このとき状態 $|n\rangle\langle n|$ を光子の個数が n の状態であると見なすことができる. このように粒子の個数 (0 を含む正の整数) に対応するベクトルが表現空間の正規直交基底になる粒子のことを Bose 粒子 (boson) とよぶ. この系では , coherent ベクトル $|\alpha\rangle_a := \sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle (\alpha \in \mathbb{C})$ が重要な役割を果たし, それに対応する密度作用素 $\rho_{\alpha,0} := |\alpha\rangle_{a\ a}\langle\alpha|$ は coherent 状態とよばれる. 重要な POVM として

$$B \subset \mathbb{N} \mapsto \sum_{n\in B} |n\rangle\langle n|$$
$$B \subset \mathbb{C} \mapsto \int_B |\alpha\rangle_{a\ a}\langle\alpha|\, d\alpha$$

が知られており, それぞれ, 個数測定, ヘテロダイン測定とよばれる. coherent 状態は比較的安定な状態で量子光学で重要な役割を果たす. 以下, 未知状態が量子ガウス状態 $\rho_{\zeta,N} := \frac{1}{\pi N}\int e^{-\frac{|\alpha-\zeta|^2}{N}}|\alpha\rangle_{a\ a}\langle\alpha|\, d\alpha$ である場合の推定理論を述べる .

まず , ノイズの大きさである N が既知であるとする . すると , 与えた密度作用素族 $\mathcal{S}^g_N := \{\rho_{\zeta,N}|\zeta(=\zeta_1+i\zeta_2) \in \mathbb{C}\}$ の複素パラメータ $\zeta \in \mathbb{C}$ を推定することになる . このときには,

$$C^{NQ}_\zeta = C^Q_\zeta = 2(N+1)$$

となり, 量子相関を用いることの効果は無い. この下限を与える推定量は各系に対してヘテロダイン測定を行いサンプル平均を取ることで構成できる. この場合は各系に対する測定を適応的に変える必要は無い.

ζ のみではなく N まで推定するのであればどうであろうか. この場合, 新たな密度作用素族 $\mathcal{S}^g := \{\rho_{\zeta,N}|\zeta \in \mathbb{C}, \quad N > 0\}$ の下で

$$C^{NQ}_{\zeta,N} \neq C^Q_{\zeta,N} = (N+2)(N+1) = 2(N+1) + N(N+1)$$

となることが示せ, 量子相関を用いることの効果が現れる. 残念ながら $C^{NQ}_{\zeta,N}$ の値は具体的には求まっていない.

ここで少し手法を変えて, 量子相関の有無による差を評価することにする. 複素パラメータ $\zeta(=\zeta_1+\zeta_2 i)$ についての平均 2 乗誤差の和に対する制限 (ζ だけの推定の最適な場合と同程度の精度を ζ の推定に課す.)

$$V^{1,1}_{\zeta,N}(M^n, T_n) + V^{2,2}_{\zeta,N}(M^n, T_n) = \frac{2(N+1)}{n}, \qquad (2)$$

$\forall\zeta \in \mathbb{C}, N > 0$ の下で, 3 つ目パラメータ N についての平均 2 乗誤差 $V^{3,3}_{\zeta,N}(M^n, T_n)$ に注目する. さらに条件 $\lim_{n\to\infty} V^{3,3}_{\zeta,N}(M^n, T_n) = 0, \quad \forall\zeta \in \mathbb{C}, N > 0$ を加えた上で極限 $\lim_{n\to\infty} nV^{3,3}_{\zeta,N}(M^n, T_n)$ を最小化する. 量子相関を用いない場合, 量子相関を用た場合のそれぞれの最小値を $C^{3,NQ}_{\zeta,N}, C^{3,Q}_{\zeta,N}$ と書き表すことにすると, これらは以下のように計算できる.

$$C^{3,NQ}_{\zeta,N} = (N+1)^2, \quad C^{3,Q}_{\zeta,N} = N(N+1)$$

量子相関を用いない推定量で条件 (2) を満たし, $\lim_{n\to\infty} nV^{3,3}_{\zeta,N}(M^n, T_n) = (N+1)^2$ となる (漸近的に限界を達成する) 測定 M^n としては, 各系に対するヘテロダイン測定が挙げられる. 量子相関を用た推定量で条件 (2) を満たし, $\lim_{n\to\infty} nV^{3,3}_{\zeta,N}(M^n, T_n) = N(N+1)$ となる推定量は以下の手順で構成できる. 以下に与える推定量は $\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^3 V^{i,i}_{\zeta,N}(M^n, T_n) = C^Q_{\zeta,N} = (N+2)(N+1)$ となり, 漸近的に下限 $C^Q_{\zeta,N}$ を達成する意味でも最適である.

まず $\rho^{\otimes n}_{\zeta,N}$ に各系同士をうまく相互作用させて, 以下のように時間発展させる.

$$\rho^{\otimes n}_{\zeta,N} \mapsto \rho_{\sqrt{n}\zeta,N} \otimes \rho^{\otimes n-1}_{0,N}.$$

そして,1 番目の系に対してはヘテロダイン測定を行いその測定値をそのまま ξ の推定値とし, 残りの $n-1$ 個の系に対しては個数測定を行い平均値を N の推定値とする. 詳しくは参考文献 [1] を参照のこと.

参考文献

[1] 林正人, 松本啓史, 量子系における統計的推測の最近の発展, 日本応用数理学会誌, 9 月号掲載予定.