# Asymptotic estimation theory for a finite dimensional pure state model

# (有限次元純粋状態族における漸近推定理論)

林 正人

量子力学系で観測を行ったときに得られる測定値については, 確率的にしか予言できないことは良く知られている. この測定結果 $\omega$ に関する確率分布 $P(d\omega)$ は, 行った測定 $M$ と測定対象である物理系の (測定直前の) 状態 $\rho$ に依存して $P(d\omega) = P(d\omega|\rho, M)$ のように定まる. このように, 量子力学が統計的側面を持っている以上, 量子力学の本質的理解のためには, 数理統計学と量子力学を融合させた理論体系の構築が不可欠である. また同時に, 光通信システムを始めとする量子力学に従うシステムから得られる情報の限界を追究するにもこのような理論体系は必須である.

このような問題を扱う分野は量子推定理論と呼ばれ, 対象とする物理系が量子力学に従うとき, 我々が知りうる情報の限界を統計学の立場から論ずる分野である. 具体的には真の状態があるパラメトリックな集合 (族) $\mathcal{S} = \{\rho_\theta|\theta \in \Theta\}$ に属することだけが分っているという想定の下で, 未知パラメータ $\theta$ の値を観測データから推定する問題を扱う. ここで, もし族 $\mathcal{S}$ とともに測定 $M$ もあらかじめ指定されていると仮定すると, 確率分布 $P_\theta(d\omega) = P(d\omega|\rho_\theta, M)$ に従うデータ $\omega$ を見て $\theta$ を推定するという単なる確率分布のパラメータ推定の問題になってしまうのだが, 量子推定の場合には, 指定されるのは族 $\mathcal{S}$ のみであり, 測定 $M$ については $\theta$ の推定という目的のために最も適したものを求めることが必要となる. このような研究は 1960 年代の後半に上述の光通信システムの受信過程の最適化に関連して Helstrom によって始められた.

近年では複数の未知なる量子状態のサンプル $\rho$ が与えられたときに, 各サンプルにまたがる測定も含めて測定過程を最適化する方向が模索されつつある. ここで述べた各サンプルにまたがる測定は複数のサンプルからなる系を一つの量子系 (合成量子系) と見なして, その合成量子系に対する測定として記述される. このような測定は一般には各サンプルに対する測定を逐次的に行う方法では構成できない. 各サンプル間のを量子的干渉を用いることによって初めて可能となる測定である. このような測定は量子相関を用いた測定と呼ばれ, 各サンプルに対する逐次的な測定と推定誤差においてどの程度の差が有るかが興味有るところである. 一方, 量子相関を用いた測定の物理的実現可能性であるが, 背景熱ノイズ中のコヒーレント光の複素振幅と熱ノイズの大きさを同時に推定する問題での最適測定については比較的実現可能性が高いと言われている.

このような状況の下, 本論文では申請者は有限次元 Hilbert 空間上の純粋状態全体からなる状態族に対する推定問題を漸近論的枠組みで扱った. 具体的には, 同一な未知の純粋状態のサンプルが $n$ 個独立に準備されたとの仮定の下で, サンプル間の量子相関を利用した測定も含めて測定に関して最適化を行い, 最適解に対して平均 2 乗誤差及び大偏差型双方の意味で漸近的な誤差評価を行った. この問題設定の下では独立かつ同一に準備された $n$ 個の未知の量子状態のサンプルからなる合成量子系上の状態は $n$ 階テンソル空間ではなく, $n$ 階対称テンソル空間上の状態とみなすことができる.

一般に, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対応する量子系では状態は $\mathcal{H}$ 上の非負定値でトレースが 1 である自己共役作用素 (密度演算子) で記述される. そして, 独立かつ同一な $n$ 個のサンプルからなる状態は合成系上の状態として $\rho^{(n)} := \rho \otimes \cdots \otimes \rho$ で記述される. 一方, 測定によって得られる測定値の確率分布のみを記述するのであれば, 測定過程は数学的には $\mathcal{H}$ 上の正作用素値測度 Positive Operator valued Measure(POVM) で記述される. 従って量子相関を許した測定を考えるのであれば $n$ 階対称テンソル空間上の POVM を考えることになる. 一般に $\mathcal{H}$ 上の $\Omega$ に測定値を持つ POVM とは $\Omega$ の Borel 集合族 $\mathcal{B}(\Omega)$ から $\mathcal{H}$ 上の Hermite 非負定値行列全体への写像 $\Pi$ で次の条件を満たすものであある.

$$\Pi(\Omega) = \mathrm{Id}, \quad \Pi(\cup_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \Pi(B_i)$$

ただし，$B_i$ は 互いに，disjoint な $\mathcal{B}(\Omega)$ の元．

一般に推定誤差の評価は真の状態が $\rho$ であるときに, 測定値 $\hat{\rho}$ を得たときの誤差の大きさを評価する関数 (危険関数) $W(\rho,\hat{\rho})$ の形に依存する. 本論文で扱う状態族は SU 群の作用に関して対称な構造を持っているため, 危険関数には SU 群の作用に関する不変性を要請する. 本論文で扱う問題では, この仮定は誤差を表す関数 $W(\rho,\hat{\rho})$ が Fubini-Study 距離の関数として表せることと同値である．ここで，Fubini-Study 計量からの下で測地線により定義される距離を Fubini-Study 距離と呼ぶことにした．さらに，$W(\rho,\hat{\rho})$ に Fubini-Study 距離に関して単調増加になるとの自然な要請を加える．これらの要請の下で Bayes 法とミニマックス法との最適解を考える．

ミニマックス法は測定 $\Pi$ によって定義される次の値を最小化することによって最適測定を決定する手法である．

$$\mathcal{D}^{W,(n)}(\Pi) := \max_{\rho\in\mathcal{P}(\mathcal{H})}\int_{\mathcal{P}(\mathcal{H})} W(\rho,\hat{\rho})\,\mathrm{tr}(\Pi(\,d\hat{\rho})\rho^{(n)})$$

ここで $\mathcal{H}$ 上の純粋状態全体からなる集合を $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ で表した．

一方，Bayes 法とは $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の事前分布 $\pi$ を仮定しその下で測定 $\Pi$ によって定義される次の値を最小化することによって最適測定を決定する手法である．

$$\mathcal{D}^{W}_{\pi}(\Pi) := \int_{\mathcal{P}(\mathcal{H})}\int_{\mathcal{P}(\mathcal{H})} W(\rho,\hat{\rho})\,\mathrm{tr}(\Pi(\,d\hat{\rho})\rho^{(n)})\pi(\,d\rho)$$

Bayes 法を用いるときは，事前分布 $\pi$ に対して SU 群の作用に関する不変との仮定を課すことにする.

古典的な統計学では，同様の条件を満たしかつモデルに対する群の作用が推移的であるとき，最適解は一意に求まることが知られている（Hunt-Stein 定理）. 本論文で扱う問題には，Holevo により定式化された量子 Hunt-Stein 定理が適用できる．量子 Hunt-Stein 定理により Bayes 法とミニマックス法との最適解は一致することがわかる．さらにモデルの表現空間に対する群の作用が既約であるため問題はかなり扱いやすくなり，最適測定は次の正定値作用素 $\hat{W}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルにより決定される．

$$\hat{W} := \int_{\mathcal{P}(\mathcal{H})} W(\rho,\hat{\rho})\hat{\rho}^{(n)}\pi(\,d\hat{\rho})$$

一般に正定値作用素の最小固有値に対応する固有ベクトルを見つけることは困難であが，$W(\rho,\hat{\rho})$ が前述の仮定を満たす限り，正定値作用素 $\hat{W}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルは同じであることが示され，最適測定も同一であることが示される．その最適測定は $\mathcal{H}$ の $n$ 階対称テンソル空間上の POVM として以下で表される．ちなみに $\mathcal{H}$ の $n$ 階対称テンソル空間の次元は $\mathcal{H}$ の次元を $k$ とすると $\binom{n+k-1}{k-1}$ である．

$$\binom{n+k-1}{k-1}\hat{\rho}^{(n)}\ \pi(\,d\hat{\rho})$$

この最適測定の一意性の証明が本論文の主結果である．

この結果を用いて, 最適測定に対して サンプル数 $n$ 無限大のとき, Fubini-Study 距離や Bure 距離の二乗誤差を $n$ で割った値が漸近的にどのような値に収束するか具体的に計算した．この最適値は，既に松本により研究された局所的な純粋状態の推定理論から予想された値であった．すなわち，局所不偏性条件の下で共分散行列に Fubini-Study 計量をかけたものの対角和の最小値と本論文で得られた値は一致する．同時にこれらの距離の下で誤差の大偏差型評価も行った．

続いて本論文では各量子状態に同一の測定を行った後に統計的処理を行って状態を推定する場合との比較を行った．サンプル数 $n$ が有限のときは，先ほどの最適測定の方が誤差は小さいが，サンプル数 $n$ が無限大のときの漸近的な誤差の値は, $\frac{1}{n}$ のオーダーで先ほどの場合と同一になることが示された（距離の 2 乗型誤差の場合）. 高次のオーダーでの比較は今後の課題である.

前者は各サンプル間の量子相関を積極的に用いた最適測定であるが，その相関を用いた効果があまり出ないことを示している．これは，本論文で問題となる状態族の表現空間が $\mathcal{H}$ の $n$ 階テンソル空間ではなく，$\mathcal{H}$ の $n$ 階対称テンソル空間に制限されることが効いていることと思われる．