The 24th Symposium on Information Theory
and Its Applications (SITA2001)
Kobe, Hyogo, Japan, Dec. 4 - 7, 2001

一般情報源の仮説検定及び情報源固定長符号化での正しい確率の指数
Exponent of correct probability of hypothesis testing and fixed-length source coding with the general source

林 正人* 長岡 浩司 †
Masahito Hayashi Hiroshi Nagaoka

Abstract—We discuss the exponent of correct probability of hypothesis testing and fixed-length source coding with the general source. This problem is discussed by Han under a regularity condition. We derive a general formula without a regularity condition.

Keywords—Information spectrum,Exponent of correct probability, Hypothesis testing, Fixed-length source coding, General source

1 はじめに

韓-Verdu により始められた情報スペクトル的手法は基本的に情報源に全く性質を仮定せずに, その情報源の操作的性質を扱うことができる. 当初,Resolvability の逆定理を扱うところから, 情報スペクトルは導入されたが [1], 韓により, その後様々な問題に適用され, その適応範囲は著しく広がった. 特に, 情報源固定長符号化や, 単純な仮説検定にたいしては, 誤り確率の指数評価にまで, 扱うことができた. (以下, 単純な仮説検定のみ考えるので, 仮説検定と言えば単純な仮説検定を意味するとする.) そこで, 重要な役割を果たしたのが, スペクトルの切り出しであった. 韓は, 正しく復号化される確率 (仮説検定の場合は第 2 種の正しく検定する確率. 以下両者とも正しい確率と略す.) の指数評価についても扱った. しかしながら, 全く一般の情報源に対して議論することが出来ず, 情報源の形にある種の制限を与えた形でしか結果が得られなかった.

本稿では, 全く一般の情報源に対して正しい確率の指数評価の公式を与える. 固定長符号化については, 仮説検定の議論に帰着できることが知られているので, 一般の仮説検定について議論し, その結果を後ほど, 固定長情報源符号化に適用する. 手法としては, 韓が用いたスペクトルの切り出しは一切用いず, ネイマンピアソンの不等式とある種自明な, 不等式のみを用いることにする. このことから, 今回用いた議論はある種の自然な量子的拡張が可能となる. しかし, ながら, その量子的拡張が有効か否かは議論のあるところであり, 拡張 [2] があるが, それとは異なった拡張 [3] も, 可能である.

* 理化学研究所 脳科学総合研究センター 脳数理研究チーム〒 351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1, Laboratory for Mathematical Neuroscience, Brain Science Institute, RIKEN. Wako, Saitama, 351-0198, JAPAN.

† 電気通信大学 大学院 情報システム学研究科〒 182-8585 調布市調布ヵ丘 1-5-1, Graduate School of Information Systems, University of Electro-Communications. 1-5-1, Chouhugaoka, Chouhu-shi, Tokyo, 182-8585, JAPAN.

2 仮説検定

以下, 離散集合列 $\vec{\mathcal{X}} = \{\mathcal{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 上の 2 つの確率分布列 $\vec{\rho} = \{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\vec{\sigma} = \{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. $\vec{\rho}$ は帰無仮説に対応し, $\vec{\sigma}$ は対立仮説に対応する. 以下では, 後での固定長情報源符号化への応用のため, $\vec{\rho}$ $\vec{\sigma}$ を $\rho_n : \mathcal{X}_n \to [0,1]$ $\sigma_n : \mathcal{X}_n \to [0,1]$ とする. 一般にランダム検定を含めて検定を記述するために, $\mathcal{X}_n$ から $[0,1]$ への関数 T_n で検定を記述することにする. 受容域 $A_n \subset \mathcal{X}_n$ に対応する検定は 1_{A_n} で表せる. するとこのとき第 1 種の誤り確率 $\alpha_n[T_n]$ 及び第 2 種の誤り確率 $\beta_n[T_n]$ はそれぞれ,

$$\alpha_n[T_n] \stackrel{\rm def}{=} 1 - \rho_n[T_n], \quad \beta_n[T_n] \stackrel{\rm def}{=} \sigma_n[T_n]$$

で与えられる. ただし,

$$\rho_n[T_n] \stackrel{\rm def}{=} \sum_{x \in \mathcal{X}_n} \rho_n(x) T_n(x), \quad \sigma_n[T_n] \stackrel{\rm def}{=} \sum_{x \in \mathcal{X}_n} \sigma_n T_n(x)$$

とした. 本稿ではむしろ $\alpha_n[T_n]$ と

$$\beta_n^c[T_n] \stackrel{\rm def}{=} 1 - \sigma_n[T_n]$$

の振る舞いに注目する. ここで

$$\begin{aligned} \eta_n[T_n] &\stackrel{\rm def}{=} -\tfrac{1}{n} \log \alpha_n[T_n] \\ \zeta_n^c[T_n] &\stackrel{\rm def}{=} -\tfrac{1}{n} \log \beta_n^c[T_n] \end{aligned}$$

と定義し,

$$\underline{\eta}[\vec{T}] \stackrel{\rm def}{=} \liminf_{n\to\infty} \eta_n[T_n], \qquad \overline{\eta}[\vec{T}] \stackrel{\rm def}{=} \limsup_{n\to\infty} \eta_n[T_n],$$
$$\underline{\zeta}^c[\vec{T}] \stackrel{\rm def}{=} \liminf_{n\to\infty} \zeta_n[T_n], \qquad \overline{\zeta}^c[\vec{T}] \stackrel{\rm def}{=} \limsup_{n\to\infty} \zeta_n[T_n].$$

を用いて, 以下の操作的な量を

$$\begin{aligned} B_e^*(r \,|\, \vec{\rho} \| \vec{\sigma}) &\stackrel{\rm def}{=} \inf_{\vec{T}} \{ \overline{\zeta}^c[\vec{T}] \,|\, \underline{\eta}[\vec{T}] \ge r \}, \\ B_{e,1}^*(r \,|\, \vec{\rho} \| \vec{\sigma}) &\stackrel{\rm def}{=} \inf_{\vec{T}} \{ \overline{\zeta}^c[\vec{T}] \,|\, \eta_n[T_n] \ge r \ (\forall n) \}, \\ \hat{B}_e^*(r \,|\, \vec{\rho} \| \vec{\sigma}) &\stackrel{\rm def}{=} \inf_{\vec{T}} \{ \underline{\zeta}^c[\vec{T}] \,|\, \underline{\eta}[\vec{T}] \ge r \}, \\ \hat{B}_{e,1}^*(r \,|\, \vec{\rho} \| \vec{\sigma}) &\stackrel{\rm def}{=} \inf_{\vec{T}} \{ \underline{\zeta}^c[\vec{T}] \,|\, \eta_n[T_n] \ge r \ (\forall n) \}, \end{aligned}$$

を定義する. ここで, 尤度比検定 $S_n(a)$ $(a \in \mathbf{R})$ を以下の不等式を満たすもので定義する.

$$\{\rho_n - e^{na}\sigma_n > 0\} \le S_n(a) \le \{\rho_n - e^{na}\sigma_n \ge 0\}. \quad (1)$$

ここで $\mathcal{X}_n$ の部分集合 A とそれ上の定義関数 1_A を同一視した. さらに $S_n^c(a) \stackrel{\text{def}}{=} I - S_n(a) = \{\rho_n - e^{na}\sigma_n \underset{(=)}{\le} 0\}$ とすると, 2 つの不等式

$$\begin{aligned}(\rho_n - e^{na}\sigma_n)\big[S_n^c(a)\big] &\le 0, & (2)\\ (\rho_n - e^{na}\sigma_n)\big[S_n^c(a)\big] &\le (\rho_n - e^{na}\sigma_n)\big[T_n^c\big]. & (3)\end{aligned}$$

が成り立つ. これらは, 以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}\alpha_n(a) - e^{na}\beta_n^c(a) &\le 0, & (4)\\ \alpha_n(a) - e^{na}\beta_n^c(a) &\le \alpha_n[T_n] - e^{na}\beta_n^c[T_n], & (5)\end{aligned}$$

2 つ目の式はネイマン-ピアソンの補題と同値な式である. ただし, 以下のように定義した.

$$\begin{aligned}\alpha_n(a) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_n[S_n(a)] = \rho_n\big[\{\rho_n - e^{na}\sigma_n \underset{(=)}{\le} 0\}\big],\\ \beta_n(a) &\stackrel{\text{def}}{=} \beta_n[S_n(a)] = \sigma_n\big[\{\rho_n - e^{na}\sigma_n \underset{(=)}{\ge} 0\}\big],\\ \beta_n^c(a) &\stackrel{\text{def}}{=} \beta_n[S_n^c(a)] = \sigma_n\big[\{\rho_n - e^{na}\sigma_n \underset{(=)}{\le} 0\}\big].\end{aligned}$$

そして, 以下 $\underline{\zeta}^c[S_n\vec{(}a)], \overline{\zeta}^c[S_n\vec{(}a)], \underline{\eta}[S_n\vec{(}a)], \overline{\eta}[S_n\vec{(}a)]$ を $\underline{\zeta}^c(a), \overline{\zeta}^c(a), \underline{\eta}(a), \overline{\eta}(a)$ と略記する. $\alpha_n(a), \beta_n^c(a)$ はそれぞれ, 単調増加であるから, $\underline{\zeta}^c(a), \overline{\zeta}^c(a), \underline{\eta}(a), \overline{\eta}(a)$ は全て単調減少となる.

これらの量を用いて韓 [4, 5] は以下の定理を示した.

定理 1 任意の a に対して, $\underline{\eta}(a) = \overline{\eta}(a)$ となり, 任意の M に対して, 以下の条件を満たす K が存在するとする.

$$\liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\sigma_n\Big[\Big\{\frac{1}{n}\log\frac{\sigma_n}{\rho_n} \ge K\Big\}\Big] \ge M, \quad (6)$$

この 2 つめの条件は

$$\underline{\zeta}^c(-\infty) = \infty. \quad (7)$$

と同値である. このとき $\eta(a) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\eta}(a) = \overline{\eta}(a)$ とすると,

$$B_e^*(r \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma}) = \inf_a \Big\{a + \eta(a) + [r - \eta(a)]_+\Big\}, \quad (8)$$

となる. ただし, $[\,t\,]_+$ は $\max\{t, 0\}$ を表す.

この定理に対して我々は以下の定理を得た.

定理 2 任意の $r \ge 0$ に対して, 以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}B_e^*(r \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma}) &= B_{e,1}^*(r \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma}) & (9)\\ &= \sup_a \min\{\overline{\zeta}^c(a),\, r + a\} & (10)\\ &= \inf_a \max\{\overline{\zeta}^c(a),\, r + a\} & (11)\\ &= r + a_0^*, & (12)\\ \hat{B}_e^*(r \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma}) &= \hat{B}_{e,1}^*(r \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma}) & (13)\\ &= \sup_a \min\{\underline{\zeta}^c(a),\, r + a\} & (14)\\ &= \inf_a \max\{\underline{\zeta}^c(a),\, r + a\} & (15)\\ &= r + \hat{a}_0^*, & (16)\end{aligned}$$

ただしここで, 以下のように定義した.

$$\begin{aligned}a_0^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\, a \mid \overline{\zeta}^c(a) - a \ge r\,\} &= \inf\{\, a \mid \overline{\zeta}^c(a) - a \le r\,\},\\ \hat{a}_0^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\, a \mid \underline{\zeta}^c(a) - a \ge r\,\} &= \inf\{\, a \mid \underline{\zeta}^c(a) - a \le r\,\}.\end{aligned}$$

定理 2 の証明では以下の補題が重要な役割を果たす.

補題 3 任意の検定の列 $\vec{T}$ に対して,

$$\begin{aligned}\overline{\zeta}^c[\vec{T}] &\ge \min\{\overline{\zeta}^c(a),\ a + \underline{\eta}[\vec{T}]\}, & (17)\\ \underline{\zeta}^c[\vec{T}] &\ge \min\{\underline{\zeta}^c(a),\ a + \underline{\eta}[\vec{T}]\}. & (18)\end{aligned}$$

が成立し, 特に, $a < b$ となる $a < b$ について

$$\begin{aligned}\overline{\zeta}^c(b) \ge a + \underline{\eta}(b) \quad \textit{if} \quad \overline{\zeta}^c(a) > \overline{\zeta}^c(b). & (19)\\ \underline{\zeta}^c(b) \ge a + \underline{\eta}(b) \quad \textit{if} \quad \underline{\zeta}^c(a) > \underline{\zeta}^c(b). & (20)\end{aligned}$$

となる.

証明 (5) より,

$$\begin{aligned}\overline{\zeta}^c[\vec{T}] &= \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\beta_n^c[T_n]\\ &\ge \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\Big(\beta_n^c(a) + e^{-na}\alpha_n[T_n]\Big)\\ &\ge \min\Big\{\overline{\zeta}^c(a),\ a + \underline{\eta}[\vec{T}]\Big\},\end{aligned}$$

となる. ここで最後の式変形では, 一般的な関係式

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log(x_n + y_n) \ge\\ &\min\Big\{\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log x_n,\ \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log y_n\Big\}.\end{aligned}$$

を用いた. 同様に一般的な関係式

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log(x_n + y_n) \ge\\ &\min\Big\{\liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log x_n,\ \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log y_n\Big\}.\end{aligned}$$

を用いることにより, (18) を得る. $\hat{B}_e^*(r \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma})$ に関する式も (17) の代りに (18) を用いることにより, 証明できる. □

定理 2 の証明 $\underline{\eta}[\vec{T}] \ge r$ を満たす検定の列を考える. (17) より,

$$\begin{aligned}\overline{\zeta}^c[\vec{T}] &\ge \sup_a \min\Big\{\overline{\zeta}^c(a),\ \underline{\eta}[\vec{T}] + a\Big\}\\ &\ge \sup_a \min\Big\{\overline{\zeta}^c(a),\ r + a\Big\}\\ &\ge \sup_a\{\, r + a \mid \overline{\zeta}^c(a) \ge r + a\,\} = r + a_0^*,\end{aligned}$$

となる. 従って

$$B_e^*(r\,|\,\vec{\rho}\,\|\,\vec{\sigma}) \geq \sup_a \ \min\{\overline{\zeta}^{\,c}(a), r+a\} \geq r + a_0^*. \quad (21)$$

が示せた. 次に, 任意の $r \geq 0$, a と n に対して, 以下を満たす検定 T_n をつくる.

$$\eta_n[T_n] \geq r \quad \text{and} \quad \zeta_n^{\,c}[T_n] \leq \max\{\zeta_n^{\,c}(a),\, r+a\}. \quad (22)$$

$\eta_n(a) \geq r$ ならば, $T_n \stackrel{\rm def}{=} S_n(a)$ は明らかに, この条件を満たす. $\eta_n(a) < r$ のときについては,

$$\begin{aligned} T_n &\stackrel{\rm def}{=} I - e^{-n(r-\eta_n(a))}\, S_n^{\,c}(a) \\ &= S_n(a) + \{1 - e^{-n(r-\eta_n(a))}\}\, S_n^{\,c}(a). \end{aligned}$$

と定義する. すなわち,T_n はランダム検定で, $S_n(a)$ が ρ_n を棄却するときについては, 確率 $e^{-n(r-\eta_n(a))}$ で仮説, ρ_n を棄却する. 従って (4) を用いると

$$\begin{aligned} \eta_n[T_n] &= r - \eta_n(a) + \eta_n(a) = r \\ \zeta_n^{\,c}[T_n] &= r - \eta_n(a) + \zeta_n^{\,c}(a) \leq r + a, \end{aligned}$$

を得る. これから,$\eta_n[T_n] \geq r$ となり,

$$\begin{aligned} \overline{\zeta}^{\,c}[\vec{T}] &\leq \limsup_{n\to\infty} \max\{\zeta_n^{\,c}(a),\, r+a\} \\ &= \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\}, \end{aligned}$$

となる検定の列 $\vec{T} = \{T_n\}$ を構成することができた. これは

$$\begin{aligned} B_{e,1}^*(r\,|\,\vec{\rho}\,\|\,\vec{\sigma}) &\leq \inf_a \ \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\} \\ &\leq \inf_a \{r + a \mid \overline{\zeta}^{\,c}(a) \leq r + a\} = r + a_0^*. \end{aligned}$$

を示しており, $B_e^*(r\,|\,\vec{\rho}\,\|\,\vec{\sigma}) \leq B_{e,1}^*(r\,|\,\vec{\rho}\,\|\,\vec{\sigma})$ が自明であることから,(16) を組み合わせると, 題意が得られる. □

上の証明では (4)(5) のみから定理が証明されたことに注意されたい.

さらに, 以下の補題が成立する.

補題 4 以下の式が成立する.

$$\inf_a \ \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\}$$

$$\begin{cases} \leq \inf_a(a + \max\{\overline{\eta}(a), r\}) & \\ \geq \inf_a(a + \max\{\underline{\eta}(a), r\}) & \text{if } r \leq a_1 \\ = \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) & \text{if } r > a_1 \end{cases} \quad (23)$$

$$\inf_a \ \max\{\underline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\}$$

$$= \begin{cases} \inf_a(a + \max\{\underline{\eta}(a), r\}) & \text{if } r \leq \hat{a}_1 \\ \underline{\zeta}^{\,c}(-\infty) & \text{if } r > \hat{a}_1 \end{cases} \quad (24)$$

ただし,

$$\begin{aligned} a_1 &\stackrel{\rm def}{=} \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) - \sup\{a | \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) = \overline{\zeta}^{\,c}(a)\} \\ \hat{a}_1 &\stackrel{\rm def}{=} \underline{\zeta}^{\,c}(-\infty) - \sup\{a | \underline{\zeta}^{\,c}(-\infty) = \underline{\zeta}^{\,c}(a)\} \end{aligned}$$

と定義した.

証明 (23) の 1 つ目の式は (17) より自明なので, (23) の他の式を示す. まず,b_0 を

$$b_0 \stackrel{\rm def}{=} \sup\{a \,|\, \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) = \overline{\zeta}^{\,c}(a)\},$$

で定義する. そして $a > b_0$ となる任意の a に対して,

$$\overline{b} \stackrel{\rm def}{=} \sup\{b | b < a, \quad \overline{\zeta}^{\,c}(b) > \overline{\zeta}^{\,c}(a)\}$$

を定義する. すると $\overline{\zeta}^{\,c}(\overline{b}+0) \geq \overline{\zeta}^{\,c}(a)$ となり,

$$\begin{aligned} \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\} &\geq \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(\overline{b}+0),\, r+\overline{b}\} \\ &\geq \overline{b} + \max\{\underline{\eta}(\overline{b}+0), r\} \\ &\geq \sup_{a'} \Big(a' + \max\{\underline{\eta}(a'),\, r\}\Big), \end{aligned}$$

となる. ここで 2 つ目の式では (19) に $b \stackrel{\rm def}{=} b+0, a \stackrel{\rm def}{=} b-0$ を代入した式を用いた. 従って,

$$\inf_{a>b_0} \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\} \geq \inf_a \Big(a + \max\{\underline{\eta}(a),\, r\}\Big), \quad (25)$$

となり,$b_0 = -\infty$ のときは題意を得る. $b_0 > -\infty$ のときは以下の議論が必要である.

$$\max\{\overline{\zeta}^{\,c}(b_0+0),\, r+b_0\} \leq \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(b_0),\, r+b_0\}$$

であるから,

$$\inf_{a>b_0} \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\} = \inf_{a\geq b_0} \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\} \quad (26)$$

となる. さらに,

$$\begin{aligned} \inf_{a<b_0} \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\} &= \inf_{a<b_0} \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(-\infty),\, r+a\} \\ &= \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty), \end{aligned} \quad (27)$$

となる. 以下,

$$\inf_{a>b_0} \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\} \leq \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) \quad \text{if} \quad r \leq \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) - b_0$$

$$\inf_{a>b_0} \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\} \geq \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) \quad \text{if} \quad r > \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) - b_0$$

を示す. この式が示せると, (25)(26),(27) より (23) が示せる. $r \leq \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) - b_0$ とすると,

$$\begin{aligned} & \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) = \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(-\infty), r+b_0\} \\ \geq \ & \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(b_0+0), r+b_0\} \geq \inf_{a>b_0} \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\} \end{aligned}$$

となる. 逆に,$r > \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) - b_0$ とすると, $a > b_0$ となる a について,

$$\begin{aligned} & \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, r+a\} > \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) - b_0 + a\} \\ > \ & \max\{\overline{\zeta}^{\,c}(a),\, \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty)\} = \overline{\zeta}^{\,c}(-\infty) \end{aligned}$$

従って題意を得た. 同様に (18),(20) を用いれば (24) も示せる. □

補題 4 と定理 2 から以下の系を得る.

系 5 任意の a に対して, $\underline{\eta}(a) = \overline{\eta}(a)$ となるとする. このとき,$\eta(a) \stackrel{\rm def}{=} \underline{\eta}(a) = \overline{\eta}(a)$ とすると,

$$B_e^*(r \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma}) = \begin{cases} \inf_a \left\{ a + \eta(a) + [r - \eta(a)]_+ \right\} & \text{if } r \le a_1 \\ \overline{\zeta}^c(-\infty) & \text{if } r > a_1 \end{cases}$$

が成立する.

証明 $\inf_a \left\{ a+\eta(a)+[r-\eta(a)]_+ \right\} = \inf_a (a+\max\{\eta(a), r\})$ となることと補題 4 と定理 2 から自明. □

次に, $B_e^{**}(q \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma})$ と双対な量として以下の量を考える.

$$\begin{aligned} B_e^{**}(q \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma}) &\stackrel{\rm def}{=} \sup_{\vec{T}} \{ \underline{\eta}[\vec{T}] \,|\, \overline{\zeta}^c[\vec{T}] \le q \} \\ &= \sup \{ r \,|\, B_e^*(r \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma}) \le q \} \end{aligned}$$

これについては以下の式を得る.

$$B_e^{**}(q \,|\, \vec{\rho} \,\|\, \vec{\sigma}) = q - a_0^{**}, \tag{28}$$

ただし,

$$a_0^{**} \stackrel{\rm def}{=} \inf \{ a \,|\, \overline{\zeta}^c(a) \le q \} = \sup \{ a \,|\, \overline{\zeta}^c(a) > q \}.$$

と定義した.

3 情報源固定長符号化

$\mathcal{X}_n$ 上の確率分布 p_n に従って生成される情報源の固定長符号化のを考える. 符号をあらわす集合を $\mathcal{Y}_n$ とすると, 符号化は $\mathcal{X}_n$ から $\mathcal{Y}_n$ への関数 ϕ_n で表され, 復号化は $\mathcal{Y}_n$ から $\mathcal{X}_n$ への関数 ψ_n で表される. さらに, 確率的な符号化, 復号化を考えるのであれば, それぞれ, 確率遷移行列 $\phi_n(y_n|x_n), \psi_n(x_n|y_n)$ で表される. したがって, 固定長符号化では, の大きさ $\hat{\alpha}_n[\phi_n, \psi_n] \stackrel{\rm def}{=} \#\mathcal{Y}_n$ をなるべく小さくし, なおかつ, 正しい確率 $\hat{\beta}_n[\phi_n, \psi_n] \stackrel{\rm def}{=} p_n\{x_n = \psi_n \circ \phi_n(x_n)\}$ を大きくすることが課題となる. 確率的な場合は $\hat{\beta}_n[\phi_n, \psi_n] \stackrel{\rm def}{=} p_n[T_n]$ とかける. ただし, $T_n(x_n) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{y_n \in \mathcal{Y}_n} \phi_n(y_n|x_n)\psi_n(x_n|y_n)$ とした. するとこのとき $\#\mathcal{Y}_n \ge I_n[T_n]$ となる. ただし,I_n は $\mathcal{X}_n$ 上の counting measure を表す. $(I_n(x_n) \stackrel{\rm def}{=} 1, \forall x_n)$. さらに

$$\begin{aligned} R_e^*(r|\vec{p}) &\stackrel{\rm def}{=} \inf_{\vec{\phi},\vec{\psi}} \{ \hat{\eta}[\vec{\phi},\vec{\psi}] | \hat{\zeta}^c[\vec{\phi},\vec{\psi}] \le r \} \\ \overline{\sigma}^c(a) &\stackrel{\rm def}{=} \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log p_n\{p_n - e^{-na} \ge 0\}, \\ \hat{\eta}[\vec{\phi},\vec{\psi}] &\stackrel{\rm def}{=} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \hat{\alpha}_n[\phi_n, \psi_n] \\ \hat{\zeta}^c[\vec{\phi},\vec{\psi}] &\stackrel{\rm def}{=} \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \hat{\beta}_n[\phi_n, \psi_n] \end{aligned}$$

と定義する. 韓 [4, 6] は以下のことを示した.

定理 6 $\overline{\sigma}^c(a) = \underline{\sigma}^c(a)$ となるとき, $\sigma^c(a) := \overline{\sigma}^c(a) = \underline{\sigma}^c(a)$ と置くと, 以下の式が成立する.

$$R_e^*(r|\vec{p}) = \inf \left\{ h \ge 0 \,\middle|\, \inf_{a \ge 0} \sigma^c(a) + [a - \sigma^c(a) - h]_+ \le r \right\}$$

それに対し, 先の仮説検定の結果を使うと以下の定理が成り立つ.

定理 7

$$R_e^*(r|\vec{p}) = -r + \inf \{ a | \overline{\sigma}^c(a) \le r \}$$

証明 このとき, したがって,$[\phi_n, \psi_n]$ で表される符号化復号化は帰無仮説 $\vec{I} \stackrel{\rm def}{=} \{I_n\}$, 対立仮説 $\vec{p} \stackrel{\rm def}{=} \{p_n\}$ となる仮説検定での検定 $1 - T_n$ に帰着できることから,

$$-R^*(r|\vec{p}) \le R_e^{**}(r|\vec{I}\|\vec{p}) \tag{29}$$

を得る. 一方, 帰無仮説 $\vec{I} \stackrel{\rm def}{=} \{I_n\}$, 対立仮説 $\vec{p} \stackrel{\rm def}{=} \{p_n\}$ となる仮説検定に対して, $\hat{\alpha}_n[\phi_n, \psi_n] \le [e^{nr}], \hat{\beta}_n[\phi_n, \psi_n] \ge e^{-n\eta_n^c(a), -a-r}$ となる符号化復号化 $[\phi_n, \psi_n]$ が構成できることが示せる. 従って (29) と逆向きの不等式が示せ, (28) を組み合わせると題意を得る. □

参考文献

[1] T.S. Han and S. Verdú, "Approximation theory of output statistics," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.39, no.3, pp.752–772, 1993.

[2] H. Nagaoka and M. Hayashi, "An Information-Spectrum Approach to Classical and Quantum Hypothesis Testing," in preparation.

[3] 林 正人 "一般量子情報源における量子仮説検定," Proceedings of 24th Symposium on Information Theory and its Applications, Kobe, Hyogo, Japan 2001 掲載予定.

[4] 韓太舜「情報理論における情報スペクトル的手法」倍風館 1998.

[5] T.S. Han, "Hypothesis testing with the general source," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.46, no.7, pp.2415–2427, 2000.

[6] T.S. Han, "The reliability functions of the general source with fixed-length coding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.46, no.6, pp.2117–2132, 2000.

[7] K. Iriyama, "Probability of error for the fixed-length source coding of general sources," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.47, no.4, 1537-1543, 2001.