圏と関手入門

橋本 光靖

〒 464–8602 名古屋市千種区不老町
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1 Introduction

(1.1) **圏 (けん, category)** と**関手 (functor)** は, Eilenberg と Mac Lane により創始された. その後, 位相幾何学, 代数幾何学, 環論で威力を発揮し, 有用な数学的対象と認められていった. **モノイダル圏 (monoidal category)**, **三角圏 (triangulated category)**, n **圏** (**n-category**) などのバリエーションを生みつつ, 数学のかなりの部分に浸透している. 特に, はじめは双対性を記述するための必要から提出された**導来圏**とよばれる三角圏を積極的に調べる動きは代数幾何学および多元環の表現論に今も広がりつつある.

(1.2) 圏論は, **アーベル圏 (abelian category)**, 導来圏のキーワードに代表されるホモロジー代数と, そうではない話題に大別される. 本講義ではあまりホモロジー代数に深く立ち入らずに, 圏論の基礎を学ぶ.

(1.3) 圏論はそれ自身を深く研究しようという人でなくても, 数学を学ぶならば, 特に (1.1) で挙げたような分野を学ぶならば, 一通り学んでおいた方が良い. どの程度を「一通り」というかは議論の余地のあるところではあるが . . . 圏論を身につけると, 違った数学に共通する現象を圏論的言葉を通して理解することが出来, 有用である.

(1.4) 本講義ではまず, 基本的な言葉を学んだ後, **随伴関手 (adjoint functor)** と**極限 (limit)** に関する Freyd の定理をひとまずの目標にする.

(1.5) 圏論学習の際の注意としては, 1) 具体例をたよりに 2) 基礎を大切に 3) 頭を柔軟に ということだろう. どれも数学を学ぶならば当り前ではないかと思われるかも知れないが, 圏論では特にそうだと実感する.

2　圏の定義

(2.1)　$Q=(\mathcal{O},\mathcal{M},s,t)$ が**箙 (えびら, quiver)** または**有向グラフ (oriented graph)** であるとは,

(2.1.1) $\mathcal{O}$, $\mathcal{M}$ は集合.

(2.1.2) $s:\mathcal{M}\to\mathcal{O}$ および $t:\mathcal{M}\to\mathcal{O}$ は写像.

であることをいう. $\mathcal{O}$ の元は点 (vertex) といい, $\mathcal{M}$ の元は矢 (arrow) という. $f\in\mathcal{M}$ について, $s(f)$ は f の source, $t(f)$ は f の target という. $\mathcal{O}$ および $\mathcal{M}$ が有限集合のとき, Q は有限箙であるという.

Q が箙だといったら, $\mathcal{O}$ は Q_0 で, $\mathcal{M}$ は Q_1 で表すことが多い.

箙 $Q=(\mathcal{O},\mathcal{M},s,t)$ に対して, $\mathcal{M}_0=\mathcal{O}$ とおき, $n\geq 1$ に対して,

$$\mathcal{M}_n(Q):=\{(f_1,\ldots,f_n)\in\mathcal{M}^n\mid s(f_i)=t(f_{i+1})\ (i=1,\ldots,n-1)\}$$

と定義し, $\mathcal{M}_n=\mathcal{M}_n(Q)$ の元を Q の長さ n の**道 (path)** という. $s(f_i)=v_i$, $t(f_1)=v_0$ とするとき, この道を

$$v_n\xrightarrow{f_n}v_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}v_{n-2}\xrightarrow{f_{n-2}}\cdots\xrightarrow{f_2}v_1\xrightarrow{f_1}v_0 \tag{2.1.3}$$

と図示する. Source から矢が出て, target に入る. 道 (2.1.3) の表し方には流儀があり, $(f_1,\ldots,f_n)$ を $f_1\cdots f_n$ とか, 場合によっては, 書く順序をかえて $f_n\cdots f_1$ とか表すこともあり, 注意が必要である. あとの圏での合成を表す都合から, 我々は $(f_1,\ldots,f_n)$ とか $f_1\cdots f_n$ とかは使うが, $f_n\cdots f_1$ と書く流儀は採用しない.

(2.2)　$\mathcal{C}=(\mathcal{O},\mathcal{M},s,t,\circ)$ が**圏 (けん, category)** であるとは,

(2.2.1) $(\mathcal{O},\mathcal{M},s,t)$ は箙. この箙を $\mathrm{Quiver}(\mathcal{C})$ と書く. $\mathcal{M}_n(\mathrm{Quiver}(\mathcal{C}))$ は単に $\mathcal{M}_n$ とか $\mathcal{M}_n(\mathcal{C})$ とか表す. このとき,

(2.2.2) $\circ:\mathcal{M}_2\to\mathcal{M}$ は写像. $\circ(f,g)$ は, $f\circ g$ と表すことにする.

これらが次をみたすことを要請する.

(2.2.3) $(f,g)\in\mathcal{M}_2$ について, $s(f\circ g)=s(g)$, $t(f\circ g)=t(f)$.

(2.2.4) (結合律) すべての $(f,g,h)\in\mathcal{M}_3$ について, $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

(2.2.5) (単位律) ある写像 $1:\mathcal{O}\to\mathcal{M}$ が存在して, 任意の $f\in\mathcal{M}$ に対して, $f\circ 1_{s(f)}=f=1_{t(f)}\circ f$. ただし, $A\in\mathcal{O}$ について, $1(A)$ は 1_A のように書いている.

上の $\mathcal{O}$ を $\mathcal{C}$ の**対象の集合**といい, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と表す. $\mathcal{O}$ の元を $\mathcal{C}$ の**対象 (object)** という. $\mathcal{M}$ を $\mathcal{C}$ の**射の集合**といい, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ で表す. $\mathcal{M}$ の元を $\mathcal{C}$ の**射 (morphism)** または**矢 (arrow)** という. $f\in\mathcal{M}$ について, $s(f)$ を f の **source**, または**始域 (domain)** あるいは **定義域 (domain)** という. $t(f)$ は f の **target**, または**終域 (codomain)** という.

写像 $\circ$ は, **合成 (composition)** とよばれる. $(f,g)\in\mathcal{M}_2$ について, $f\circ g$ は g と f の**合成 (composite)** という.

この講義では, 混乱の恐れのない限り, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を単に $\mathcal{C}$ と書くことがある. $A\in\mathcal{C}$ などと書いたら, $A\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の意味と解釈される.

$A,B\in\mathcal{C}$ に対して, $s^{-1}(A)\cap t^{-1}(B)\subset\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}(A,B)$ とか, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ などと表し, A から B への射の集合という. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ の元は, A から B への射という. $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ であることは $f:A\to B$ などと表す.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ は, 合成を積とし, 1_A を単位元とする**モノイド (monoid)** (つまり, 単位元を持つ半群) となる. よって 1_A は一意的である. 実際, $1'$ が別の単位元ならば, $1'=1'\circ 1_A=1_A$. 従って写像 $1:\mathcal{O}\to\mathcal{M}$ も一意的である. 1_A を A の**恒等射 (identity morphism)** と呼ぶ.

(2.3) 圏の定義は次のように言い直される.

$$\mathcal{C}=(\mathcal{O},(\mathcal{C}(a,b))_{(a,b)\in\mathcal{O}^2},(\circ_{(a,b,c)})_{(a,b,c)\in\mathcal{O}^3})$$

が圏とは, $\mathcal{O}$ が集合で, $(\mathcal{C}(a,b))_{(a,b)\in\mathcal{O}^2}$ は $\mathcal{O}^2$ で添字付けられた集合族で, $(\circ_{(a,b,c)})_{(a,b,c)\in\mathcal{O}^3}$ は $\mathcal{O}^3$ で添字づけられた写像の族で,

(2.3.1) $(\mathcal{C}(a,b))$ は disjoint. つまり, $(a,b)\neq(a',b')$ ならば $\mathcal{C}(a,b)\cap\mathcal{C}(a',b')=\emptyset$.

(2.3.2) $\circ_{(a,b,c)}$ は $\mathcal{C}(b,a)\times\mathcal{C}(c,b)$ から $\mathcal{C}(c,a)$ への写像. 以後誤解がなければ $\circ_{(a,b,c)}$ は単に $\circ$ と書く.

(2.3.3) 各 $a\in\mathcal{O}$ に対して, ある $1_a\in\mathcal{C}(a,a)$ が存在して, 任意の $b\in\mathcal{O}$ と任意の $f\in\mathcal{C}(b,a)$, 任意の $g\in\mathcal{C}(a,b)$ に対して単位法則 $1_a\circ f=f$, $g\circ 1_a=g$ が成立する.

(2.3.4) 任意の $a,b,c,d\in\mathcal{O}$ と任意の $f\in\mathcal{C}(a,b)$, $g\in\mathcal{C}(b,c)$, $h\in\mathcal{C}(c,d)$ について, 結合法則 $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$ が成立する.

をみたすことをいう. 第一の定義から $\mathcal{C}(a,b)$ を定めるのは $\mathcal{C}(a,b)=s^{-1}(a)\cap t^{-1}(b)$ で良かった. $\circ_{(a,b,c)}$ は $\circ$ の $\mathcal{C}(b,a)\times\mathcal{C}(c,b)$ への制限とすれば良い. 逆に第二の定義から $\mathcal{M}=\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ は, $\bigcup_{(a,b)\in\mathcal{O}^2}\mathcal{C}(a,b)$ として定義すれば良く, $\circ$ は, $f\circ g=f\circ_{(t(f),s(f),s(g))}g$ で定めれば問題ない. $f\in\mathcal{M}$ に対して, $f\in\mathcal{C}(a,b)$ となる $(a,b)\in\mathcal{O}^2$ は (2.3.1) によって一意的に存在する. このとき, $s(f)=a$, $t(f)=b$ と定めれば, s と t も定まる.

(2.4) これは正確には (ここでの定義での) 圏の例ではないが, $\mathcal{O}$ をすべての集合の集まり, $\mathcal{M}$ をすべての写像の集まり, $f\in\mathcal{M}$ について, f が A から B への写像ならば, $s(f)=A$, $t(f)=B$ とし, さらに $(f,g)\in\mathcal{M}_2$ について, $f\circ g$ は写像の合成とすれば, 1_A を A の恒等写像として, $\mathcal{C}=(\mathcal{O},\mathcal{M},s,t,\circ)$ は圏に近いものになる. 圏と違う点は, $\mathcal{O}$, $\mathcal{M}$ が (巨大すぎて) 集合にならない点である. だから s, t, $\circ$ も通常の意味での写像ではない. このような $\mathcal{C}$ も圏と呼ぶ場合もある. 参考書 [McL] では**メタ圏 (metacategory)** と呼ばれているものになるが, 本講義では集合にならない圏は扱わない.

(2.5) すべての集合の集まりは巨大すぎて集合ではなく, (ここでの) 圏にもならない. この問題を解決するために考えられたのが宇宙の概念である. 宇宙はあたかもすべての集合の集まりのようにその中で各種の操作が可能であるが, それ自身集合でもある, というものである.

定義. 集合 $\mathcal{U}$ が**宇宙 (universe)** であるとは,

(2.5.1) $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}\in\mathcal{U}$

(2.5.2) $x\in y$, $y\in\mathcal{U}$ ならば $x\in\mathcal{U}$.

(2.5.3) $I\in\mathcal{U}$, $f:I\to\mathcal{U}$ が写像ならば, $\bigcup_{i\in I}f(i)\in\mathcal{U}$.

(2.5.4) $x\in\mathcal{U}$ ならば, x のベキ集合 $\mathcal{P}(x)$ は $\mathcal{U}$ の元.

をみたすことを言う.

2.6 演習. $\mathcal{U}$ が宇宙のとき, 次が成立する.

(2.6.1) $x\subset y$, $y\in\mathcal{U}$ ならば $x\in\mathcal{U}$.

(2.6.2) $\mathbb{N}$ の部分集合は $\mathcal{U}$ の元.

(2.6.3) 空集合 $\emptyset$ は $\mathcal{U}$ の元.

(2.6.4) $x_1,\ldots,x_n\in\mathcal{U}$ ならば, $x_1\cup\cdots\cup x_n\in\mathcal{U}$.

(2.6.5) $x_1,\dots,x_n \in \mathcal{U}$ ならば, $\{x_1,\dots,x_n\} \in \mathcal{U}$.

(2.6.6) $x_1,\dots,x_n \in \mathcal{U}$ ならば, $(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{U}$.

(2.6.7) $x \in \mathcal{U}$, x' は集合, $\#x = \#x'$ で, $y \subset \mathcal{U}$ で, $f : x' \to y$ が全射ならば, $y \in \mathcal{U}$. ここに $\#x$ は x の濃度を表す.

(2.6.8) $\mathcal{U}$ の元の同値関係による商集合は $\mathcal{U}$ の元である.

(2.6.9) $x, y \in \mathcal{U}$ ならば $x \times y \in \mathcal{U}$.

(2.6.10) $\mathbb{Z} \in \mathcal{U}$, $\mathbb{Q} \in \mathcal{U}$ である.

(2.6.11) $x, y \in \mathcal{U}$ ならば, $\mathrm{Map}(x, y) \in \mathcal{U}$ である.

(2.6.12) $\mathbb{R} \in \mathcal{U}$, $\mathbb{C} \in \mathcal{U}$ である.

(2.6.13) $I \in \mathcal{U}$, $f : I \to \mathcal{U}$ が写像のとき, $\prod_{i\in I} f(i) \in \mathcal{U}$.

(2.6.14) $\emptyset \neq I \in \mathcal{U}$, $f : I \to \mathcal{U}$ が写像のとき, $\bigcap_{i\in I} f(i) \in \mathcal{U}$.

解答にあたっては, 次を注意されたい.

順序のついた列 $(x_1,\dots,x_n)$ とは, 集合

$$\{\{x_1\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2,x_3\},\dots,\{x_1,\dots,x_n\}\}$$

のことだと理解されたい. A が集合で $\equiv$ が A の同値関係であるとき, 商集合 $A/\equiv$ とは, $\equiv$ による同値類のなす集合

$$\{C \in \mathcal{P}(A) \mid \exists x \in C\ \forall y \in A\ [y \in C \Leftrightarrow x \equiv y]\} \subset \mathcal{P}(A)$$

であったことに注意する. 有限直積 $A_1 \times \cdots \times A_n$ はとりあえず

$$\{(a_1,\dots,a_n) \mid a_1 \in A_1,\dots,a_n \in A_n\}$$

として定義できる. これは上の定義によって $\mathcal{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ の部分集合である. 写像 $f : A \to B$ は, 三つ組み $(A, B, \Gamma(f))$ のことだと理解する. ここに, $\Gamma(f)$ は f のグラフ

$$\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$$

である. つまり, 写像とは, 三つ組み $f = (A, B, C)$ であって, C が $A \times B$ の部分集合で, 任意の A の元 a に対して, ただ一つの B の元 b が存在して,

$(a,b) \in C$ であるもののことである, と定義するのである. 無論このとき, f は A から B への写像であると称し, $f(a) = b$ である, というわけである. $\mathrm{Map}(x,y)$ は x から y への写像の全体である.

$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}^2$ に同値関係 $\sim$ を

$$(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = b+c$$

で入れた商集合 $\mathbb{N}^2/\sim$ と考えられる (だから (a,b) の類が $a-b$). $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ に同値関係 $\sim$ を

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$$

で入れた商集合 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\sim$ と考えられる (だから (a,b) の類が a/b). $\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ の元は有理数列 $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ とみなせる. その中で Cauchy 列になっているもの全体を C とし, C に同値関係 $\sim$ を

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \text{ は } 0 \text{ に収束する}$$

で入れた商集合 $C/\sim$ は $\mathbb{R}$ とみなせる (だから $\boldsymbol{x}$ の類を $\boldsymbol{x}$ の極限と同一視するのである). $\mathbb{C}$ は単に $\mathbb{R}^2$ (に演算を入れたもの) のことだと理解して良い. 集合族 $(X_i)_{i\in I}$ に対して, 直積 $\prod_{i\in I} X_i$ は

$$\{f \in \mathrm{Map}(I, \bigcup_{i\in I} X_i) \mid \forall i \in I\ f(i) \in X_i\}$$

のことだと理解すれば, 直積は和集合から構成される.

要するに, 与えられた宇宙 $\mathcal{U}$ の範囲内で, 通常の数学はすべて実現される.

(2.7) 我々は任意の集合 X に対して, $X \in \mathcal{U}$ となる宇宙 $\mathcal{U}$ が存在する, という公理を置いて議論する.

3 圏の例

代表的な圏の例について見ていこう.

(3.1) $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \emptyset$ である圏 $\mathcal{C}$ がただ一つ存在する. これを**空な圏 (empty category)** という.

(3.2) X が集合のとき, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = X$ とし, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \{1_x \mid x \in X\}$, $1_x \circ 1_x = 1_x$ と定めれば圏になる. 各 $x \in X$ に対し, $\mathcal{C}(x,x) = \{1_x\}$, $\mathcal{C}(x,y) = \emptyset$ $(x \neq y)$ である. このような圏を**疎な圏 (discrete category)** という.

(3.3)　$\mathcal{C}$ が圏, $A \in \mathcal{C}$ のとき, $\mathcal{C}(A,A)$ を $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A)$ と表すことがある. $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A)$ はモノイドになるのだった. 逆に, M がモノイドのとき, 唯一つの対象 $*$ を考え, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{*\}$ とし, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(*) = M$ と置いて, 射の合成は M の積で与える, とすれば $\mathcal{C}$ は圏になる. つまり, 対象を一つしか持たない圏 (**単対象圏**) とモノイドは本質的に同じである.

(3.4)　集合 P の関係 $\leq$ が**擬順序 (pseudoorder)** または**前順序 (preorder)** であるとは, 任意の $a \in P$ に対して $a \leq a$ (反射律) と, 任意の $a,b,c \in P$ に対して $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$ (推移律) が成り立つことをいう. 順序は擬順序である. 同値関係も擬順序である. P が擬順序集合, すなわち擬順序が備わった集合とするとき, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = P$ とし, $a,b \in P$ に対して, $\mathcal{C}(a,b) = \{(b,a)\}$ ($a \leq b$ のとき), $\mathcal{C}(a,b) = \emptyset$ (そうでないとき) と定め, $(c,b) \circ (b,a) = (c,a)$ と定めれば圏になる. 逆に, 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $a,b \in \mathcal{C}$ に対して $a \leq b$ であるとは $\mathcal{C}(a,b) \neq \emptyset$ のことだと定義すれば, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は擬順序集合になる. 擬順序集合と, 各 $a,b \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(a,b)$ が高々一つの元からなるような圏 $\mathcal{C}$ とは, 本質的に同じものである.

(3.5)　(3.4) により, 順序集合は圏とみなせる. 特に, $n \geq 0$ に対して, n 個の元からなる順序集合 $\boldsymbol{n} = \{0, \ldots, n-1\}$ は圏である. $\mathbf{0}$ は空な圏 (3.1) である. $\mathbf{1}$ は 1 個の対象からなる疎な圏である. $\mathbf{2}$ は図で書くと $0 \longrightarrow 1$ といった感じ. $\mathbf{3}$ は $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$ などと書くことがある. 0 から 2 へも射があるのだが, 他の射の合成で書けてしまう射は書かない場合もある.

(3.6)　以後本講義では宇宙 $\mathcal{U}$ を一つとって固定して考える. $\mathcal{U}$ の元を**小さい集合 (small set)** と呼ぶことにする. ただし, 小さい, というのは濃度が小さい, ということではない. 例えば $\{\mathcal{U}\}$ は唯一つしか元を持たない有限集合であるが, $\{\mathcal{U}\} \notin \mathcal{U}$ である (証明せよ).

(3.7)　$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathcal{U}$ とし, $a,b \in \mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{C}(a,b) = \mathrm{Map}(a,b)$ とし, 合成は写像の合成で与えた圏 $\mathcal{C}$ を $\underline{\mathrm{Set}}$ で表し, (小さい) 集合の圏と呼ぶ. 気持ちとしてはすべての集合の圏というものを考えたいところだが, そのようなものはもはや集合として扱うことが出来ず, 不便である. 巨大なものをあくまで集合の範囲で議論できるところが宇宙の利点である.

(3.8)　小さい集合であるような群を**小さい群**という. 小さい環, 小さい位相空間, などなども同様である.

(3.9)　対象をすべての小さい群とし, 射を群準同型とし, 合成を写像の合成で与えると圏になる. これを (小さい) 群の圏といい, $\underline{\mathrm{Grp}}$ で表す. (小さい) アーベル群の圏 $\underline{\mathrm{Ab}}$, (小さい) 環の圏 $\underline{\mathrm{Rng}}$, (小さい) 可換環のなす圏 $\underline{\mathrm{CRng}}$,

(小さい) 左 R 加群の圏 $R\,\mathrm{Mod}$ なども同様にして定義される.

(3.10)　対象をすべての小さい順序集合とし, 射を順序を保つ写像とすると圏になる. これを (小さい) 順序集合の圏といって, $\underline{\mathrm{Ord}}$ で表す.

(3.11)　対象をすべての小さい位相空間とし, 射を連続写像で与え, 合成は写像の合成で与えると圏になる. これを (小さい) 位相空間の圏といい, $\underline{\mathrm{Top}}$ で表す. 同様に対象を小さい C^r 多様体, 射を C^r 写像とすると圏が出来る. これを (小さい) C^r 多様体の圏といい, $C^r\underline{\mathrm{Mfd}}$ と表す.

(3.12)　対象をすべての小さいスキームとし, 射をスキームの射で与えると, 圏になる. この圏 $\underline{\mathrm{Sch}}$ の特徴は, 射が単なる写像とみなすことが困難であることである.

(3.13)　圏 $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, s, t, \circ)$ が小さいとは, $\mathcal{C}$ を集合と見て小さいことである. これは $\mathcal{O}$ および $\mathcal{M}$ が小さい集合であることと同値である. $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ などは小さい圏である. 一般に小さい擬順序集合は小さい圏である. $\underline{\mathrm{Set}}$, $\underline{\mathrm{Grp}}$, $\underline{\mathrm{Ab}}$, $\underline{\mathrm{Top}}$ などは小さい圏ではない.

(3.14)　$\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ **圏 ($\mathcal{U}$-category)** であるとは, $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, $\mathcal{C}(a, b) \in \mathcal{U}$ であることをいう. さらに $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \in \mathcal{U}$ であれば, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \in \mathcal{U}$ となって $\mathcal{C}$ は小さい. $\underline{\mathrm{Set}}$, $\underline{\mathrm{Grp}}$, $\underline{\mathrm{Ab}}$, $\underline{\mathrm{Top}}$ などは $\mathcal{U}$ 圏である.

4　圏の構成 (1)

群から群を作る操作というのは色々ある. G から交換子群 $[G, G]$ を作ったり, 2 つの群を直積したりなど. 圏についても同様に, 圏から圏を作る操作が色々ある. その中で基本的なものを学ぶ.

(4.1)　$\mathcal{C}$ が圏, $\mathcal{O}'$ は $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の部分集合, $\mathcal{M}'$ は $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ の部分集合とし, 条件

(4.1.1) $\mathcal{M}' \subset s^{-1}(\mathcal{O}') \cap t^{-1}(\mathcal{O}')$

(4.1.2) $1(\mathcal{O}') \subset \mathcal{M}'$

(4.1.3) $\circ((\mathcal{M}' \times \mathcal{M}') \cap \mathcal{M}_2) \subset \mathcal{M}'$

がみたされるとする. このとき, $\mathcal{O}' \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathcal{M}' \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ で, s, t, $\circ$ は $\mathcal{C}$ のそれと同じで, $\mathcal{C}' = (\mathcal{O}', \mathcal{M}', s, t, \circ)$ が圏になる. このような圏 $\mathcal{C}'$ を $\mathcal{C}$ の**部分圏 (subcategory)** という. $(\mathcal{O}', \mathcal{M}')$ が $\mathcal{C}$ の部分圏である, などと言った言い方も本講義ではする.

(4.2) $\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{C}' = (\mathcal{O}', \mathcal{M}')$ が $\mathcal{C}$ の**充満部分圏 (full subcategory)** であるとは, $\mathcal{M}' = s^{-1}(\mathcal{O}') \cap t^{-1}(\mathcal{O}')$ であることを言う．言い換えると, 任意の $a, b \in \mathcal{O}'$ に対して, $\mathcal{C}'(a,b) = \mathcal{C}(a,b)$ であることである．このとき無論 $\mathcal{C}'$ は $\mathcal{C}$ と $\mathcal{O}'$ のみから定まるので, $\mathcal{C}'$ は $\mathcal{O}'$ を対象の集合とする $\mathcal{C}$ の充満部分圏である, などという．任意の $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の部分集合 $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{C}$ の充満部分圏を定める．

(4.3) $r > s$ のとき, C^r 多様体の圏 $C^r\underline{\mathrm{Mfd}}$ は, $C^s\underline{\mathrm{Mfd}}$ の部分圏であるが, 充満部分圏ではない．つまり, C^r 多様体から C^r 多様体への C^s 写像は C^r 写像とは限らない．アーベル群の圏 $\underline{\mathrm{Ab}}$ は群の圏 $\underline{\mathrm{Grp}}$ の充満部分圏である．アーベル群の間の群準同型はアーベル群の圏の射であるから．同様に, $\underline{\mathrm{CRng}}$ は $\underline{\mathrm{Rng}}$ の充満部分圏である．有限生成左 R 加群の全体を考えると, これは $R\,\underline{\mathrm{Mod}}$ の充満部分圏を定めている．

(4.4) (双対圏) これまでの例では圏の対象とは, 大体集合に構造の入ったもので, 射は写像で構造を保つもの, といった感じだったが, 双対圏をとると, そういう直感は覆される．

圏 $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, s, t, \circ)$ に対して, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, t, s, \circ')$ を $\mathcal{C}$ の**双対圏 (opposite category)** という．ここに, $g \circ' f := f \circ g$ である．$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) = \mathcal{C}(b,a)$ であることに注意する．$\mathcal{C}$ の射 $f : A \to B$ に対して, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ では $f : B \to A$ なのである．容易に分かるように $C^{\mathrm{op}\,\mathrm{op}} = C$ である．

4.5 演習. $\mathcal{B}$ が $\mathcal{C}$ の部分圏のとき, $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ は $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の部分圏である．$\mathcal{B}$ が充満部分圏であれば, $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ は $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の充満部分圏である．

(4.6) (圏の直積) I が集合, $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ が圏の族とする．$\mathcal{C}_i = (\mathcal{O}_i, \mathcal{M}_i, s_i, t_i, \circ_i)$ とするとき, $\mathcal{C} = (\prod_{i \in I} \mathcal{O}_i, \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i, s, t, \circ)$ を $(\mathcal{C}_i)$ の**直積 (product, direct product)** と呼び, $\mathcal{C} = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ と表す．ここに, $s((f_i)) = (s_i(f_i))$, $t((f_i)) = (t_i(f_i))$, $(f_i) \circ (g_i) = (f_i \circ_i g_i)$ である．$\mathcal{C}((a_i), (b_i)) = \prod_i \mathcal{C}_i(a_i, b_i)$ である．

(4.7) (圏の直和) I が集合, $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ が圏の族とする．$\mathcal{C}_i = (\mathcal{O}_i, \mathcal{M}_i, s_i, t_i, \circ_i)$ とするとき, $\mathcal{C} = (\coprod_{i \in I} \mathcal{O}_i, \coprod_{i \in I} \mathcal{M}_i, s, t, \circ)$ を $(\mathcal{C}_i)$ の**直和 (coproduct, direct sum)** と呼び, $\mathcal{C} = \coprod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ と表す．ここに, $f \in \mathcal{M}_i$ のとき, $s(f) = s_i(f)$, $t(f) = t_i(f)$．よって f, g が合成可能なのはある共通の $\mathcal{M}_i$ に含まれて, $(f, g) \in (\mathcal{M}_i)_2$ となるときで, その時, $f \circ g = f \circ_i g$ と定めるのである．従って, $a, b \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}(a,b)$ は, a, b を共通に含む $\mathcal{O}_i$ が存在するとき, $\mathcal{C}_i(a,b)$ であり, そうでないときは $\emptyset$ である．

5 関手

集合が写像で結ばれるように, 圏は関手によって結ばれる. 関手無しで圏は語れない.

5.1 定義. 4 つ組 $F = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, F_0, F_1)$ が**関手 (functor)** であるとは,

(5.1.1) $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は圏である.

(5.1.2) $F_0 : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ は写像である.

(5.1.3) $F_1 : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ は写像である.

(5.1.4) $a, b \in \mathcal{C}$ に対して, F_1 は $\mathcal{C}(a, b)$ を $\mathcal{D}(F_0 a, F_0 b)$ に写す. 言い換えると, $sF_1 = F_0 s$, $tF_1 = F_0 t$ である.

(5.1.5) $a \in \mathcal{C}$ に対して, $F_1(1_a) = 1_{F_0 a}$ である. 言い換えると, $F_1 1 = 1 F_0$ である.

(5.1.6) $(f, g) \in \mathcal{M}_2(\mathcal{C})$ に対して, $F_1(f \circ g) = F_1(f) \circ F_1(g)$.

をみたすことをいう. このとき, F は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手であるといい, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ などと表す. $\mathcal{C}$ を F の**定義域 (domain)** といい, $\mathrm{Dom}(F)$ で表す. $\mathcal{D}$ を F の**終域 (codomain)** といい, $\mathrm{Codom}(F)$ で表す. $s(F)$, $t(F)$ でそれぞれ表しても良い. $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手全体のなす集合を $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ とか, $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ で表す.

(5.2) 通常 F_0 も F_1 も同じ記号 F で書かれるが, 普通混乱はない. つまり, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手のとき, $a \in \mathcal{C}$ に対して, $F(a) \in \mathcal{D}$. また, $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ に対して, $F(f) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ などと, 同じ記号を用いる. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が小さい圏のとき, $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ は小さい集合である.

5.3 定義. 集合 $F = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, F_0, F_1)$ が**反変関手 (contravariant functor)** であるとは,

(5.3.1) $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は圏である.

(5.3.2) $F_0 : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ は写像である.

(5.3.3) $F_1 : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ は写像である.

(5.3.4) $a, b \in \mathcal{C}$ に対して, F_1 は $\mathcal{C}(a, b)$ を $\mathcal{D}(F_0 b, F_0 a)$ に写す. 言い換えると, $tF_1 = F_0 s$, $sF_1 = F_0 t$ である.

(5.3.5) $a \in \mathcal{C}$ に対して, $F_1(1_a) = 1_{F_0 a}$ である. 言い換えると, $F_1 1 = 1 F_0$ である.

(5.3.6) $(f, g) \in \mathcal{M}_2(\mathcal{C})$ に対して, $F_1(f \circ g) = F_1(g) \circ F_1(f)$.

をみたすことをいう. このとき, F は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への反変関手であるという. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が反変関手である, とも言う.

(5.4) 関手は, 反変関手との対照で, **共変関手 (covariant functor)** と呼ばれることがあるが, 同じ意味である. $F = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, F_0, F_1)$ が反変関手であることと, $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}, F_0, F_1)$ が共変関手であることは同値である. 従って, 本講義では, F が $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への反変関手であるとき, 関手 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ が与えられた, という言い方もする.

(5.5) 関手 $F = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, F_0, F_1)$ に対して, $F^{\mathrm{op}} = (\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}^{\mathrm{op}}, F_0, F_1)$ も関手である. 反変関手 $F = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, F_0, F_1)$ に対して, $F^{\mathrm{op}} = (\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}^{\mathrm{op}}, F_0, F_1)$ は反変関手である. F^{op} と書かずに, これも F と書く場合があるようである.

6 関手の例

(6.1) 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を $a \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(a) = a$, $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ と定めると関手になる. これを $\mathcal{C}$ の**恒等関手 (identity functor)** という.

6.2 演習. (6.2.1) 小さい集合 X に対して, $f_{\#}(X) = \mathcal{P}(X)$ と定める. 小さい写像 $f : X \to Y$ に対して写像 $f_{\#} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ を $f_{\#}(A) = f(A)$ と定める. すると $(?)_{\#} : \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は関手である.

(6.2.2) 小さい集合 X に対して, $f^{\#}(X) = \mathcal{P}(X)$ と定める. 小さい写像 $f : X \to Y$ に対して写像 $f^{\#} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を $f^{\#}(B) = f^{-1}(B)$ と定める. すると $(?)^{\#} : \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は反変関手である.

(6.3) (6.2.2) はバリエーションをもつ. 小さい位相空間 X に対して, $\mathcal{O}(X)$ を X の開集合の全体とする. 小さい連続写像 $f : X \to Y$ に対して, $\mathcal{O}(f) : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ を $\mathcal{O}(f)(U) = f^{-1}(U)$ で定義すると $\mathcal{O} : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は反変関手である. 開集合の代わりに閉集合を考えても反変関手ができる.

(6.4) 順序集合 P の部分集合 I が P の**順序イデアル (poset ideal)** であるとは, $a, b \in P$, $b \in I$, $a \leq b$ ならば $a \in I$ であることをいう. 小さい順序集合 P に対して, $\mathcal{I}(P)$ を P の順序イデアル全体とする. 小さい順序写像 $f : P \to Q$ に対して, $\mathcal{I}(f) : \mathcal{I}(Q) \to \mathcal{I}(P)$ を $\mathcal{I}(f)(J) = f^{-1}(J)$ で定めると well-defined であり, $\mathcal{I} : \underline{\mathrm{Ord}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は反変関手である.

(6.5) 小さい群 $G=(G_0,\cdot)$ (ただし G_0 は G の基底集合, $\cdot$ は G の積) に対して, $F(G)=G_0$ を対応させ, 群準同型 $f:G\to G'$ には写像 $F(f)=f$ を対応させると, $F:\underline{\mathrm{Grp}}\to\underline{\mathrm{Set}}$ は関手である. F は群としての構造を忘れるので, **忘却関手 (forgetful functor)** または**忘れっぽ関手**という. 忘却関手は $\underline{\mathrm{Rng}}$, $\underline{\mathrm{Top}}$, $\underline{\mathrm{Ab}}$,... などでも同様に $\underline{\mathrm{Set}}$ への関手として定義される.

(6.6) 群 G にそのアーベル化 $F(G)=G/[G,G]$ を対応させる. 群準同型 $f:G\to G'$ に対しては, $f([G,G])\subset[G',G']$ であることから引き起こされる準同型 $F(f):G/[G,G]\to G'/[G',G']$ が対応し, 関手 $F:\underline{\mathrm{Grp}}\to\underline{\mathrm{Ab}}$ が定義される.

(6.7) $\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ の部分圏のとき, $a\in\mathcal{D}$ に対して $F(a)=a$, $f\in\mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ に対して $F(f)=f$ として, 関手 $F:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ が定まる. この関手を $\mathcal{D}$ から $\mathcal{C}$ への**埋入 (inclusion)** といい, 記号 $\mathcal{D}\hookrightarrow\mathcal{C}$ と表す.

(6.8) (関手の合成) $F=(\mathcal{C},\mathcal{D},F_0,F_1)$, $G=(\mathcal{D},\mathcal{E},G_0,G_1)$ が関手のとき, $G\circ F=(\mathcal{C},\mathcal{E},G_0\circ F_0,G_1\circ F_1)$ は明らかに関手である. これを F と G の**合成 (composite)** という. 関手の合成に関して単位法則 $\mathrm{Id}\circ F=F=F\circ\mathrm{Id}$ と結合法則 $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$ が成り立つことは容易である.

(6.9) (圏の圏) 小さい圏を対象とし, 小さい関手を射として圏ができる. 合成は (6.8) で与えた通り. これを小さい圏の圏といい, $\underline{\mathrm{Cat}}$ で表す.

(6.10) 群 G に $\mathbb{Z}$ 上の群環 $F(G):=\mathbb{Z}[G]$ を対応させる. $\varphi:G\to G'$ が群準同型のとき, $F(\varphi):\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}[G']$ を $F(\varphi)(\sum_{g\in G}c_g g)=\sum_{g\in G}c_g\varphi(g)$ で定めると環準同型となり, $F:\underline{\mathrm{Grp}}\to\underline{\mathrm{Rng}}$ は関手となる.

(6.11) $\mathcal{C}$ が圏とする. $A\in\mathcal{C}$ を固定して, $B\in\mathcal{C}$ について $\mathcal{C}(A,?)(B)=\mathcal{C}(A,B)$ とおく. また, 射 $f:B\to B'$ について, 写像 $f_*=\mathcal{C}(A,?)(f):\mathcal{C}(A,B)\to\mathcal{C}(A,B')$ を $\mathcal{C}(A,?)(f)(g)=f\circ g$ とおく. $(1_*f_*)(g)=1\circ f\circ g=f\circ g=f_*(g)$ だから $1_*f_*=f_*$. 同様にして, $f_*1_*=f_*$, $f_*h_*=(fh)_*$ も確かめられる. これは次を示す.

補題. $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏, $A\in\mathcal{C}$ のとき, $\mathcal{C}(A,?)$ は $\mathcal{C}$ から $\underline{\mathrm{Set}}$ への関手である.

$\mathcal{C}(A,?)(f)$ は $\mathcal{C}(A,f)$ のように書くこともある.

(6.12) 上のバリエーションとして, R が可換環, $\mathcal{C}=R\,\mathrm{Mod}$, $M\in\mathcal{C}$ の時, $\mathrm{Hom}_R(M,?)(N)=\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は単なる集合ではなく, R 加群である. また, R 加群の準同型 $f:N\to N'$ に対して, $\mathrm{Hom}_R(M,f):\mathrm{Hom}_R(M,N)\to\mathrm{Hom}_R(M,N')$ は R 準同型である. よって $\mathrm{Hom}_R(M,?)$ は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ 自身へ

の関手とみなせる．これに忘却関手 $F : R\,\mathrm{Mod} \to \underline{\mathrm{Set}}$ を合成した関手 $F \circ \mathrm{Hom}_R(M, ?)$ が補題 6.11 でいうところの, 集合に値をもつ関手 $R\,\mathrm{Mod}(M, ?)$ となるわけである．このように圏を「豊穣化」して, Hom 集合を単なる集合から, 構造を持ったものにすることがあり, R 圏, もっと一般に $\mathcal{V}$ 圏の概念に至る．

(6.13) $\mathcal{C}$ が圏, $B \in \mathcal{C}$ を固定する．今度は $\mathcal{C}(?, B)(A) = \mathcal{C}(A, B)$ とし, $f : A \to A'$ について $f^* = \mathcal{C}(?, B)(f) : \mathcal{C}(A', B) \to \mathcal{C}(A, B)$ を $\mathcal{C}(?, B)(f)(g) = g \circ f$ で定める．$1^* f^* = f^* = f^* 1^*$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ は容易である．よって,

補題. $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏, $B \in \mathcal{C}$ のとき, $\mathcal{C}(?, B)$ は $\mathcal{C}$ から $\underline{\mathrm{Set}}$ への反変関手である．

$\mathcal{C}(?, B)(f)$ は $\mathcal{C}(f, B)$ とも書く．

(6.14) $\mathcal{C}$ が小さい C^r 多様体の圏とし, $X \in \mathcal{C}$ のとき, $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ は X 上の C^r 級関数の全体に他ならず, $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ なる足し算, 引き算, 掛け算で $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ は可換環になる．$\mathcal{C}(?, \mathbb{R})$ は $\mathcal{C}$ から $\underline{\mathrm{CRng}}$ への関手である．

(6.15) 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が**忠実 (faithful)** であるとは, 各 $a, b \in \mathcal{C}$ に対して, $F : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{D}(Fa, Fb)$ が単射となることをいう．部分圏からの埋入は忠実である．各種の忘却関手は忠実である．忠実な関手は行き先が $\underline{\mathrm{Set}}$ でなくても忘却関手と呼んで差し支えないことが多い．

(6.16) 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が**充満 (full)** であるとは, 各 $a, b \in \mathcal{C}$ に対して, $F : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{D}(Fa, Fb)$ が全射であることをいう．部分圏からの埋入が充満関手である必要十分条件は, その部分圏が充満部分圏であることである．

(6.17) $f : A \to B$ が環準同型のとき, 左 B 加群 M は, $a \cdot m := f(a)m$ と定めて左 A 加群である．B 準同型は A 準同型である．これにより関手 $\mathrm{res}^B_A : B\,\mathrm{Mod} \to A\,\mathrm{Mod}$ が定まる．$\mathrm{res}^B_A(M) = M$, $\mathrm{res}^B_A(f) = f$ である．res^B_A は忠実である．しかしこれは一般には充満関手ではない．

(6.18) G が $\mathbb{C}$ 上のアフィン代数群とすると, G 加群 V は自然にリー環 $\mathrm{Lie}(G)$ 上の加群になる．G 線型写像は $\mathrm{Lie}(G)$ 線型写像であり, G 加群の圏から $\mathrm{Lie}(G)$ 加群の圏への忠実な関手 F が得られる．これも一般には充満ではない．G が連結ならば忠実充満になる．

(6.19) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が忠実 (resp. 充満) であることと, $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ が忠実 (resp. 充満) であることは同値である．

6.20 演習. 上に挙げた以外の関手の例を一つ挙げよ．

7　全射・単射・同型

(7.1)　$\mathcal{C}$ が圏, $f : A \to B$ は $\mathcal{C}$ の射とする. f が**単射 (monomorphism, mono)** であるとは, 任意の $C \in \mathcal{C}$ について, $f_* : \mathcal{C}(C, A) \to \mathcal{C}(C, B)$ ($f_*(g) = f \circ g$) が集合の単射 (つまり, 1 対 1 の写像) であることをいう.

7.2 補題. $f : A \to B$ が $\underline{\mathrm{Set}}$ の射とする. つまり小さい集合の間の写像とする. このとき, f が集合の単射 (injection), すなわち, 1 対 1 の写像 (one-to-one map) である必要十分条件は, f が (7.1) で定義した意味で単射であることである.

証明. 十分性を示す. $a, b \in A$, $f(a) = f(b)$ とする. $C = \{0\}$ とし, $g_a : C \to A$ を $g_a(0) = a$ で定義する. g_b を $g_b(0) = b$ で定義する. $(fg_a)(0) = f(a) = f(b) = (fg_b)(0)$. C には 0 しか元がなく, $f_*(g_a) = fg_a = fg_b = f_*(g_b)$. f_* の単射性により, $g_a = g_b$. よって $a = g_a(0) = g_b(0) = b$. これは f が 1 対 1 の写像であることを示す.

　必要性を示す. C が集合, $g, g' \in \mathrm{Map}(C, A)$, $fg = fg'$ とし, $c \in C$ を任意に取る. すると $f(g(c)) = f(g'(c))$. f が 1 対 1 の写像だから, $g(c) = g'(c)$. c は任意なので $g = g'$. これは $f_* : \mathrm{Map}(C, A) \to \mathrm{Map}(C, B)$ が 1 対 1 であることを示す. □

7.3 補題. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は忠実な関手, $f : A \to B$ は $\mathcal{C}$ の射とする. $F(f) : F(A) \to F(B)$ が単射ならば, f は単射である.

証明. C を $\mathcal{C}$ の任意の対象とする. 容易に分かるように, 図式

(7.3.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(C, A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "F"] & \mathcal{C}(C, B) \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{D}(F(C), F(A)) \arrow[r, "F(f)_*"] & \mathcal{D}(F(C), F(B))
\end{tikzcd}$$

仮定により $F(f)_*$ は単射である. また, 縦の矢 F は忠実性の定義によって単射である. これから $f_* : \mathcal{C}(C, A) \to \mathcal{C}(C, B)$ の単射性が従う. C は任意だから, f が単射である. □

7.4 例. $f : X \to Y$ は $\underline{\mathrm{Top}}$ の射とする. これが単射である必要十分条件は, f が単なる写像として 1 対 1 であることである.

証明. 忘却関手 $F : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は忠実なので, 十分性は補題 7.3 により明らか. 必要性は $Z = \{*\}$ を一点とするときに, $f_* : \underline{\mathrm{Top}}(Z, X) \to \underline{\mathrm{Top}}(Z, Y)$ が 1 対 1 写像であることから, $f : X \to Y$ が 1 対 1 であることが容易に従う. □

7.5 演習. $\underline{\mathrm{Grp}}$ および $\underline{\mathrm{Rng}}$ の単射がどのようなものか調べよ.

(7.6) $\mathcal{C}$ が圏, $f : A \to B$ は $\mathcal{C}$ の射とする. f が**全射 (epimorphism, epi)** であるとは, 任意の $C \in \mathcal{C}$ について, $f^* : \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$ $(f^*(g) = g \circ f)$ が集合の単射 (つまり, 1 対 1 の写像) であることをいう.

7.7 演習. $f : A \to B$ が $\underline{\mathrm{Set}}$ の射とする. つまり小さい集合の間の写像とする. このとき, f が集合の全射 (surjection), すなわち, 上への写像 (onto map) である必要十分条件は, f が (7.6) で定義した意味で全射であることである.

7.8 例. $\underline{\mathrm{Haus}}$ は小さい Hausdorff 空間全体のなす, $\underline{\mathrm{Top}}$ の充満部分圏とする. $f : X \to Y$ は $\underline{\mathrm{Haus}}$ の射で, $f(X)$ は Y で稠密とする. このとき, f は $\underline{\mathrm{Haus}}$ の全射である. f が surjective map である必要はない.

証明. 実際, Z が $\underline{\mathrm{Haus}}$ の任意の対象で, g と g' は $\underline{\mathrm{Haus}}(Y, Z)$ の元で, $gf = g'f$ とする. このとき, $M = \{y \in Y \mid g(y) = g'(y)\}$ は, Y の閉集合. 実際, $h : Y \to Z \times Z$ を $h(y) = (g(y), g'(y))$ で定めると, $M = h^{-1}(\Delta_Z)$ (ここに, $\Delta_Z = \{(z, z) \in Z^2 \mid z \in Z\}$ は対角線) であり, Z が Hausdorff だから Δ_Z が閉集合で, h は連続なので, M も閉集合. 一方, 明らかに $M \supset f(X)$ で $f(X)$ が稠密だから M も稠密. 稠密な閉集合は全体なので, $M = Y$. つまり, $g = g'$. これは f が epic であることを示す.

(7.9) f が圏 $\mathcal{C}$ の単射であることと f が $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の射として全射であることは同値である.

7.10 補題. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は忠実な関手, $f : A \to B$ は $\mathcal{C}$ の射とする. $F(f) : F(A) \to F(B)$ が全射ならば, f は全射である.

証明. $F(f)$ は $\mathcal{D}$ の全射なので, $F(f) = F^{\mathrm{op}}(f)$ は $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ の単射である. $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ は忠実だから, f は $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の単射である. すなわち, f は $\mathcal{C}$ の全射である. □

このように, 双対圏を考えると, 補題 7.10 は補題 7.3 の言い直しに過ぎなくなる. このような言明を元の言明の**双対な言明 (dual statement)** という.

7.11 演習. $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ への包含写像 $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ は $\underline{\mathrm{Rng}}$ の全射であることを示せ.

7.12 演習. R が可換環のとき, $R\,\mathrm{Mod}$ の全射がどのようなものか調べよ.

(7.13) 圏 $\mathcal{C}$ の射 $f : A \to B$ が**同型** **(isomorphism)** であるとは, ある $g : B \to A$ が存在して, $fg = 1_B$ かつ $gf = 1_A$ が成立することをいう. このとき, このような g は f によって一意的に定まり, f の**逆** **(inverse)** と呼ばれ, f^{-1} で表される. 実際, g' も逆ならば, $g' = g'(fg) = (g'f)g = g$. f が $\mathcal{C}$ の射として同型であることと, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の射として同型であることは同値である. $f : A \to B$ が同型ならば f は全射かつ単射である. 実際, $g, g' : C \to B$ が射で, $fg = fg'$ とせよ. 左辺から f^{-1} をかけて, $g = g'$. よって f は単射. 全射性も同様である. しかし, 全単射 (つまり全射かつ単射) であっても, 同型とは限らない. (7.11) を見よ. ただし, 全単射が同型になるような圏はたくさんある. $\underline{\mathrm{Set}}$ はそのような圏の代表である. f が $\mathcal{C}$ の同型射で, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が任意の関手であるとき, $F(f)$ も同型である.

(7.14) $1_A : A \to A$ は同型である. $f : A \to B$ が同型ならば, 逆 $f^{-1} : B \to A$ も同型であり, $(f^{-1})^{-1} = f$. $f : A \to B$ が同型で, $g : B \to C$ が同型のとき, $g \circ f : A \to C$ も同型で, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. A から B へ同型射が存在するとき, A と B が**同型** **(isomorphic)** であるといい, $A \cong B$ と表す. 従って, $\cong$ は $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の同値関係になる. この同値関係による同値類を**同型類** **(isomorphism class)** という.

7.15 演習. f が圏 $\mathcal{C}$ の全射で, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が忠実充満な関手で, $F(f)$ が全射ではないような例を挙げよ.

7.16 演習. $\mathcal{C}$ が圏で, $f : A \to B$, $g : B \to C$ は $\mathcal{C}$ の射とする.

(7.16.1) f と g が単射ならば, $g \circ f$ は単射である.

(7.16.2) $g \circ f$ が単射ならば, f は単射である.

(7.16.3) $g \circ f$ が単射で f が同型ならば, g は単射である.

(7.16.4) f と g が全射ならば, $g \circ f$ は全射である.

(7.16.5) $g \circ f$ が全射ならば, g は全射である.

(7.16.6) $g \circ f$ が全射で g が同型ならば, f は全射である.

(7.17) $\mathcal{C}$ が圏で $f : c \to d$ が $\mathcal{C}$ の射とする. f が**分裂単射** **(split monomorphism)** であるとは, ある $g : d \to c$ が存在して, $gf = 1_c$ となることをいう. f が分裂単射ならば, $gf = 1_c$ が単射となる g があるので, (7.16.2) によって, f は単射となる. 定義から明らかに, f が $\mathcal{C}$ の分裂単射で $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手ならば, $F(f)$ も分裂単射である. 単なる単射は関手で保たれなかった (演習 7.15 の双対言明を考えよ) が, 分裂単射は関手で保たれる利点がある.

7.18 演習. $\underline{\mathrm{Ab}}$ の単射 $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ $(i(a) = a)$ は, 分裂単射ではない.

7.19 演習. R が可換環, M が R 加群, N が M の R 部分加群, $i : N \hookrightarrow M$ は埋入写像とする. i が分裂単射である必要十分条件は, ある M の部分加群 L が存在して $M = N \oplus L$ となることである.

(7.20) $\mathcal{C}$ が圏で, $f : c \to d$ が $\mathcal{C}$ の射とする. f が**分裂全射 (split epimorphism)** であるとは, ある $g : d \to c$ が存在して, $fg = 1_d$ となることをいう. f が $\mathcal{C}$ の分裂全射である必要十分条件は f が $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の分裂単射であることである. 双対言明を考えれば, 分かるように, 分裂全射は全射であるが逆は成り立たない. 任意の関手は分裂全射を保つ.

7.21 演習. $B^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| \le 1\}$, $S^1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| = 1\}$ とおく. 連続写像 $\varphi : B^2 \to S^1$ であって, $S^1 \subset B^2$ 上では恒等写像であるようなものは存在しない.

7.22 補題. $\mathcal{C}$ が圏, $f : a \to b$ は $\mathcal{C}$ の射とする. 次は同値である.

(7.22.1) f は分裂全射である

(7.22.2) 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して $f_* : \mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(c, b)$ は分裂全射である.

(7.22.3) 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して $f_* : \mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(c, b)$ は全射である.

(7.22.4) $f_* : \mathcal{C}(b, a) \to \mathcal{C}(b, b)$ は全射である.

証明. (7.22.1)⇒(7.22.2). $g : b \to a$ で $fg = 1_b$ であるものを取ると, $f_* g_* = 1_{\mathcal{C}(c,b)}$.

(7.22.2)⇒(7.22.3) は明白.

(7.22.3)⇒(7.22.4) は (7.22.3) で $c = b$ とおけば明らか.

(7.22.4)⇒(7.22.1) は $f_*(g) = 1_b$ となる g をとれば $fg = 1_b$ だから明らか. □

7.23 系. $\mathcal{C}$ が圏, $f : b \to a$ は $\mathcal{C}$ の射とする. 次は同値である.

(7.23.1) f は分裂単射である

(7.23.2) 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して $f^* : \mathcal{C}(a, c) \to \mathcal{C}(b, c)$ は分裂全射である.

(7.23.3) 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して $f^* : \mathcal{C}(a, c) \to \mathcal{C}(b, c)$ は全射である.

(7.23.4) $f^* : \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(b, b)$ は全射である.

証明. 補題 7.22 の双対言明に過ぎない. □

7.24 補題. $\mathcal{C}$ が圏の時, $\mathcal{C}$ の射 $f: a \to b$ について, 次は同値である.

(7.24.1) f は同型.

(7.24.2) f は全射かつ分裂単射.

(7.24.3) f は単射かつ分裂全射.

(7.24.4) 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して, $f^*: \mathcal{C}(b,c) \to \mathcal{C}(a,c)$ は全単射.

(7.24.5) 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して, $f_*: \mathcal{C}(c,a) \to \mathcal{C}(c,b)$ は全単射.

証明. (7.24.1)⇒(7.24.2) は明らか.

(7.24.2)⇒(7.24.1) を示す. f が分裂単射なので, ある $g: b \to a$ が存在して $gf = 1_a$. よって $fgf = f1_a = f = 1_b f$. f が全射だから, $gf = 1_b$. $fg = 1_a$ と合わせて $g = f^{-1}$. よって f は同型である.

(7.24.1)⇔(7.24.3) は今示した (7.24.1)⇔(7.24.2) の双対言明に過ぎない.

(7.24.2)⇔(7.24.4) は, 全射の定義と系 7.23 から明白である.

(7.24.3)⇔(7.24.5) は, 今示した (7.24.2)⇔(7.24.4) の双対言明である. □

7.25 演習. $\mathcal{C}$ は圏, $f: A \to B$, $g: B \to C$ は $\mathcal{C}$ の射とする.

(7.25.1) f と g が分裂単射ならば, $g \circ f$ も分裂単射である.

(7.25.2) $g \circ f$ が分裂単射ならば, f は分裂単射である.

(7.25.3) $g \circ f$ が分裂単射で, f が全射ならば, g は分裂単射である.

(7.25.4) f と g が分裂全射ならば, $g \circ f$ も分裂全射である.

(7.25.5) $g \circ f$ が分裂全射ならば, g は分裂全射である.

(7.25.6) $g \circ f$ が分裂全射で, g が単射ならば, f は分裂全射である.

7.26 演習. $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が忠実充満な関手で, $f: A \to B$ は $\mathcal{C}$ の射とする. このとき,

(7.26.1) Ff が分裂全射ならば, f は分裂全射である.

(7.26.2) Ff が分裂単射ならば, f は分裂単射である.

(7.26.3) Ff が同型ならば, f は同型である.

8 自然変換

8.1 定義. 3 つ組 $\tau = (F, G, \tau_1)$ が**自然変換 (natural transformation)** であるとは,

(8.1.1) F, G は関手で, $s(F) = s(G)$, $t(F) = t(G)$. 以下, $s(F) = s(G) = \mathcal{C}$, $t(F) = t(G) = \mathcal{D}$ とする.

(8.1.2) $\tau_1 : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ は写像である.

(8.1.3) すべての $\mathcal{C}$ の射 $f : c \to c'$ に対して, 図式

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\tau_1 c"] \arrow[d, "Ff"] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Fc' \arrow[r, "\tau_1 c'"] & Gc' \end{tikzcd}$$

が可換である.

であることをいう. τ は F から G への自然変換であるといい, $\tau : F \to G$ と表す. 参考書 [McL] では $\tau : F \stackrel{\bullet}{\to} G$ のように表している. F を τ の**定義域 (domain)**, G を τ の**終域 (codomain)** といい, $F = \mathrm{Dom}(\tau)$, $G = \mathrm{Codom}(\tau)$ とか, $F = s(\tau)$, $G = t(\tau)$ とかと表す.

(8.2) 普通は τ と τ_1 は区別して表すようなことはなく, 同じ記号で表す. 関手 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と自然変換 $\tau : F \to G$ と, $c \in \mathcal{C}$ について, $\tau c : Fc \to Gc$ は τ_c のように, c を下付きで表すこともある. 何も下付きを書かずに $\tau : Fc \to Gc$ のように書くこともある.

(8.3) 関手 F から G への自然変換全体のなす集合を $\mathrm{Nat}(F, G)$ で表す.

(8.4) $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手, $\tau : F \to G$ は自然変換, $\sigma : G \to H$ も自然変換とする. このとき, 自然変換 $\sigma \bullet \tau : F \to H$ が, $(\sigma \bullet \tau)_c = \sigma_c \circ \tau_c$ によって定義される. これが実際に自然変換であることは, $f : c \to c'$ が $\mathcal{C}$ の射のときに, 図式

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "Ff"] \arrow[dr, phantom, "\text{(a)}"] & Gc \arrow[r, "\sigma_c"] \arrow[d, "Gf"] \arrow[dr, phantom, "\text{(b)}"] & Hc \arrow[d, "Hf"] \\ Fc' \arrow[r, "\tau_{c'}"] & Gc' \arrow[r, "\sigma_{c'}"] & Hc' \end{tikzcd}$$

の (a) と (b) がそれぞれ τ と σ の自然性から可換であり, よって (a)+(b) が可換となることから明白であろう. 参考書 [McL] では $\sigma \bullet \tau$ の $\bullet$ を略してはならないことになっている.

(8.5) $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が関手のとき, $1_F:F\to F$ を $(1_F)_c=1_{Fc}:Fc\to Fc$ で定義すれば自然変換である. これを F の恒等変換と呼ぶ. $\tau:F\to G$ が自然変換のときに, $\tau\bullet 1_F=\tau=1_G\bullet\tau$ である.

(8.6) $F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が関手, $\tau:F\to G$ は自然変換とする. このとき, $\tau:G^{\mathrm{op}}\to F^{\mathrm{op}}$ は自然変換である.

(8.7) $F,G,H,L:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が関手, $\tau:F\to G$ と $\sigma:G\to H$ と $\theta:H\to L$ は自然変換とする. このとき, $(\theta\bullet\sigma)\bullet\tau=\theta\bullet(\sigma\bullet\tau)$ は明らかであろう.

(8.8) $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を圏とするとき, 対象の集合を $\mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ とし, $F,G\in\mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ に対して, F から G への射の集合を $\mathrm{Nat}(F,G)$ であるとし, 射の合成は $(\sigma,\tau)\mapsto\sigma\bullet\tau$ で与えることにより, 圏が得られる. この圏自身も $\mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ とか, $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ とかと書く.

(8.9) $\mathcal{C}$ も $\mathcal{D}$ も小さい圏ならば, $\mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ も小さい圏である. $\mathcal{C}$ が小さくて, $\mathcal{D}$ が $\mathcal{U}$ 圏ならば, $\mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ も $\mathcal{U}$ 圏と同値 (同値は後述) である.

(8.10) 関手 $F:\mathbf{1}\to\mathcal{C}$ を与えることは, $F(0)=c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を一つ与えることに他ならない. $F(1_0)$ は関手だから 1_c で決まってしまうので. $F(0)=c$ である関手 $\mathbf{1}\to\mathcal{C}$ 自身も c で表してしまうことがある. c から c' への自然変換 σ は, $\sigma 0:c\to c'$ であるが, どんな射でも自然変換になるから, c から c' への自然変換とは, 単に c から c' への射に他ならない. よって, $\mathrm{Func}(\mathbf{1},\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ と同一視される.

(8.11) $\mathcal{C}$ の射を対象にした圏 $\mathcal{C}'$ を考える. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')=\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ である. $f:A\to B$ から $g:A'\to B'$ への $\mathcal{C}'$ の射は

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & A' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow{k} & B' \end{array}$$

が可換になるような (h,k) の組のことであると定める. $(h',k')\circ(h,k)=(h'h,k'k)$ で合成は定義される. これで $\mathcal{C}'$ は圏になるが, 実はこれは $\mathrm{Func}(\mathbf{2},\mathcal{C})$ と実質同じである. $F\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Func}(\mathbf{2},\mathcal{C}))$ が与えられると, $\mathbf{2}$ の恒等写像ではない唯一の射 $(1,0):0\to 1$ に対応して, $F(1,0):F(0)\to F(1)$ という $\mathcal{C}'$ の対象 (つまり $\mathcal{C}$ の射) が定まる. 逆に $\mathcal{C}'$ の対象 $f:A\to B$ が与えられれば, $F(0)=A$, $F(1)=B$, $F(1,0)=f$ で $F\in\mathrm{Func}(\mathbf{2},\mathcal{C})$ が定まる. $\mathcal{C}'$ の射が自然変換に対応していることも見易い. $\mathcal{C}'$ を $\mathcal{C}$ の射のなす圏という.

(8.12) 自然変換 $\sigma : F \to G$ であって, ある自然変換 $\tau : G \to F$ で, $\tau \bullet \sigma = 1_F$, $\sigma \bullet \tau = 1_G$ をみたすものが存在するものを, **自然同型 (natural isomorphism)** または**同値 (equivalence)** という. 同値という言葉は, あとで圏同値の意味でも使い, 紛らわしいので, 自然同型の方が言葉として優れていると思う. τ は σ によって一意的に定まる. これを σ^{-1} で表し, σ の**逆 (inverse)** という. F から G への自然同型が存在するとき, F と G は**同型 (isomorphic)** または**同値 (equivalent)** であるといい, $F \cong G$ で表す. $\cong$ は集合 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ の同値関係である.

8.13 演習. $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手で, $\sigma : F \to G$ は自然変換とする. このとき, σ が自然同型であるための必要十分条件は, 各 $c \in \mathcal{C}$ に対して, σ_c が同型であることである. このとき, $(\sigma^{-1})_c = (\sigma_c)^{-1}$ である.

(8.14) 直積圏 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ からの関手 $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ を $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ 上の**双関手 (bifunctor)** という. これは 2 変数関数の関手版といった感じである. $c \in \mathcal{C}$ のとき, $F(c, ?)$ は C' 上の関手になるし, $c' \in \mathcal{C}'$ のとき, $F(?, c')$ は $\mathcal{C}$ 上の関手である.

(8.15) R が可換環のとき, テンサー積

$$\otimes_R : (M, N) \mapsto M \otimes_R N$$

は $R\,\mathrm{Mod} \times R\,\mathrm{Mod}$ から $R\,\mathrm{Mod}$ への関手であり, 双関手である. 従って $M \otimes_R ?$ とか $? \otimes_R N$ は $R\,\mathrm{Mod}$ から $R\,\mathrm{Mod}$ への関手である.

(8.16) $T_{M,N} : M \otimes_R N \to N \otimes_R M$ を $T_{M,N}(m \otimes n) = n \otimes m$ で定めると, $T_{M,N}$ は $\otimes_R$ から $\otimes_R \circ \mathrm{Tw}$ への自然変換である. ここに, $\mathrm{Tw}(M, N) = (N, M)$ である. つまり, $f : M \to M'$ と $g : N \to N'$ に対して, 図式

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N \arrow[r, "T_{M,N}"] \arrow[d, "f \otimes g"] & N \otimes M \arrow[d, "g \otimes f"] \\
M' \otimes N' \arrow[r, "T_{M',N'}"] & N' \otimes M'
\end{tikzcd}$$

は可換である (確認せよ). さらに, $T_{N,M}$ が $T_{M,N}$ の逆写像であるので, T は自然同型である.

(8.17) $F : \underline{\mathrm{Grp}} \to \underline{\mathrm{Grp}}$ を $F(G) = G/[G, G]$ で定義する. $\pi : \mathrm{Id}_{\underline{\mathrm{Grp}}} \to F$ を $\pi_G : G \to G/[G, G]$ が自然な射影, として定義すると, π は自然変換である.

つまり, 群準同型 $f : G \to G'$ に対して,

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_G"] & G' \arrow[d, "\pi_{G'}"] \\
G/[G,G] \arrow[r, "F(f)"] & G'/[G',G']
\end{tikzcd}
$$

は可換である. G がアーベル群でなければ, π_G は同型ではないので, π は自然同型ではない.

(8.18) $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ が圏のとき,

$$\circ : \mathrm{Ob}(\mathrm{Func}(\mathcal{D},\mathcal{E}) \times \mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})) \to \mathrm{Ob}(\mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{E}))$$

を$\circ(G,F) = G \circ F$ で定める. また, $G_1, G_2 \in \mathrm{Func}(\mathcal{D},\mathcal{E})$, $F_1, F_2 \in \mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ と

$$
\begin{aligned}
(\tau,\sigma) \in (\mathrm{Func}(\mathcal{D},\mathcal{E}) \times \mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D}))((G_1,F_1),(G_2,F_2))& \\
= \mathrm{Nat}(G_1,G_2) \times \mathrm{Nat}(F_1,F_2)&
\end{aligned}
$$

に対して,

$$\circ(\tau,\sigma) = \tau \circ \sigma \in \mathrm{Nat}(G_1 \circ F_1, G_2 \circ F_2) = \mathrm{Func}(\circ(G_1,F_1), \circ(G_2,F_2))$$

を $c \in \mathcal{C}$ に対して, $(\tau \circ \sigma)_c$ は可換図式

$$
\begin{tikzcd}
G_1(F_1(c)) \arrow[r, "\tau_{F_1(c)}"] \arrow[d, "G_1\sigma_c"] & G_2(F_1(c)) \arrow[d, "G_2\sigma_c"] \\
G_1(F_2(c)) \arrow[r, "\tau_{F_2(c)}"] & G_2(F_2(c))
\end{tikzcd}
$$

の辺をたどって得られる射 $(G_2\sigma c)(\tau F_1 c) = (\tau F_2 c)(G_1 \sigma c)$ のことである, と定義することにより, 定義する. 図式の可換性は τ が自然変換であることから従う.

$\tau \circ \sigma$ は $\tau \bullet \sigma$ と, そもそも定義できる相手も違うし, まったく別のものである. 図式的に表すと, $\tau \bullet \sigma$ の方は,

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F", ""{name=U, below}] \arrow[r, "G" description, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=60, "H"', ""{name=L, above}] & \mathcal{D}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\sigma"] \arrow[Rightarrow, from=M, to=L, "\tau"]
\end{tikzcd}
\Longrightarrow
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F", ""{name=A, below}] \arrow[r, bend right=60, "H"', ""{name=B, above}] & \mathcal{D}
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\tau\bullet\sigma"]
\end{tikzcd}
$$

という感じで,「縦に」合成しているので, **垂直合成 (vertical composite)** と [McL] では呼ぶ. 一方, $\tau \circ \sigma$ の方は,

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F_1"{name=U1}] \arrow[r, bend right=50, "F_2"'{name=D1}] \arrow[from=U1, to=D1, "\sigma"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "G_1"{name=U2}] \arrow[r, bend right=50, "G_2"'{name=D2}] \arrow[from=U2, to=D2, "\tau"] & \mathcal{E} & \Longrightarrow & \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "G_1 \circ F_1"{name=U3}] \arrow[r, bend right=50, "G_2 \circ F_2"'{name=D3}] \arrow[from=U3, to=D3, "\tau\circ\sigma"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

と「横に」合成している感じであり, **水平合成 (horizontal composite)** と [McL] では呼ぶ.

8.19 命題. 上の記号の下で, $\circ : \mathrm{Func}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ は関手である.

証明. まず $\circ(1_{(G,F)}) = 1_{G \circ F}$ を示す. 左辺は $1_G \circ 1_F$ に他ならない. そこで $c \in \mathcal{C}$ に対して,

$$(1_G \circ 1_F)_c = (G1_F c)(1_G Fc) = (G1_{Fc})(1_{GFc}) = 1_{GFc}1_{GFc} = 1_{GFc} = 1_{G \circ F}c.$$

これは $\circ(1_{(G,F)}) = 1_{G \circ F}$ を示す.

次に $\mathrm{Func}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ の 2 つの射 $(\tau, \sigma) : (G_1, F_1) \to (G_2, F_2)$ および $(\tau', \sigma') : (G_2, F_2) \to (G_3, F_3)$ に対して, これらの合成は $\bullet$ で書くことにすると, $(\tau', \sigma') \bullet (\tau, \sigma) = (\tau' \bullet \tau, \sigma' \bullet \sigma)$ である. よって, $\circ$ が合成を保つことを示すことは,

$$(\tau' \bullet \tau) \circ (\sigma' \bullet \sigma) = (\tau' \circ \sigma') \bullet (\tau \circ \sigma) \tag{8.19.1}$$

を示すことに他ならない. これら 4 つの自然変換を図示すると,

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=70, "F_1"{name=U1}] \arrow[r, "F_2"{name=M1}] \arrow[r, bend right=70, "F_3"'{name=D1}] \arrow[from=U1, to=M1, "\sigma"] \arrow[from=M1, to=D1, "\sigma'"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=70, "G_1"{name=U2}] \arrow[r, "G_2"{name=M2}] \arrow[r, bend right=70, "G_3"'{name=D2}] \arrow[from=U2, to=M2, "\tau"] \arrow[from=M2, to=D2, "\tau'"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

となる. ここで, $c \in \mathcal{C}$ について, 図式

$$\begin{tikzcd}
G_1F_1c \arrow[r, "\tau F_1 c"] \arrow[d, "G_1\sigma c"] & G_2F_1c \arrow[r, "\tau' F_1 c"] \arrow[d, "G_2\sigma c"] & G_3F_1c \arrow[d, "G_3\sigma c"] \\
G_1F_2c \arrow[r, "\tau F_2 c"] \arrow[d, "G_1\sigma' c"] & G_2F_2c \arrow[r, "\tau' F_2 c"] \arrow[d, "G_2\sigma' c"] & G_3F_2c \arrow[d, "G_3\sigma' c"] \\
G_1F_3c \arrow[r, "\tau F_3 c"] & G_2F_3c \arrow[r, "\tau' F_3 c"] & G_3F_3c
\end{tikzcd}$$

は τ と τ' が自然変換だから, 可換である. (8.19.1) の左辺は, この図式を左上からスタートして, この田の字の図式の外側をたどって右下に至る射であり, 右辺はジグザグに進んで右下に行った射になるから, 一致する. $\square$

(8.20) この合成 $\circ$ の方は, 適宜略して良い. $\tau \circ \sigma$ は $\tau\sigma$ と書いて良い. 恒等変換 1_F は, 自然変換を意味することが明白なときは F と書いて良いことになっている. よって, τF とは, $\tau \circ 1_F$ の意味だと解釈される. よって, $(\tau F)(c) = \tau(Fc)$ である. $G\sigma$ は $1_G \circ \sigma$ の意味と解釈される. よって, $(G\sigma)(c) = G(\sigma c)$ である. この記号の下で, (8.18) の σ, τ に対して,

$$(\tau \circ \sigma) = (G_2\sigma)(\tau F_1) = (\tau F_2)(G_1\sigma) \tag{8.20.1}$$

である.

(8.21) この了解の下で, さらに, 本講義では, 誤解の恐れがなければ τF は単に τ で, $G\sigma$ は単に σ で表すことがある. すると, (8.20.1) は単に, $\tau \circ \sigma$ とは, 要するに σ と τ を任意の順序で合成したものである, となる.

8.22 命題. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ が圏のとき, 結合法則

$$\circ(\circ, 1) = \circ(1, \circ) : \mathrm{Func}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \mathrm{Func}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{F})$$

が成り立つ. また, 関手 $1_{\mathcal{C}} : \mathbf{1} \to \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ を $1_{\mathcal{C}}(0) = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, $1_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_0) = 1_{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}}$ で定義するとき,

$$\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \cong \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathbf{1} \xrightarrow{(\mathrm{Id}, 1_{\mathcal{C}})} \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

の合成は Id である. 同様に,

$$\mathrm{Func}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \cong \mathbf{1} \times \mathrm{Func}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{(1_{\mathcal{C}}, \mathrm{Id})} \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) \times \mathrm{Func}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Func}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$$

の合成は Id である.

上記 (8.19) および (8.22) により,「$\underline{\mathrm{Cat}}$ は $\underline{\mathrm{Cat}}$ 圏である」という主張が得られる. $\underline{\mathrm{Cat}}$ 圏とは, 簡単に言うと, 圏ではあるが, その Hom 集合が単なる集合ではなくて, 圏の構造を持っている, ということである. $\underline{\mathrm{Cat}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ とは, $\mathrm{Func}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ のことだから, これは圏になっている. $\underline{\mathrm{Cat}}$ 圏は別名 2 圏ともいう. $\underline{\mathrm{Cat}}$ は 2 圏の代表例である.

8.23 演習. 命題 8.22 を証明せよ.

(8.24) $\sigma : F \to G$ と $\tau : G \to H$ が自然同型ならば, $\tau \bullet \sigma$ は自然同型である. 逆は $\sigma^{-1} \bullet \tau^{-1}$. また, $E : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ と自然同型 $\sigma : F \to F'$ に対して, $E\sigma G$ は逆 $E\sigma^{-1}G$ を持つので自然同型である. 特に, $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G, G' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ および, 自然同型 $\sigma : F \to F'$ と $\tau : G \to G'$ に対して, $\tau \circ \sigma = (\tau F') \bullet (G\sigma)$ は自然同型である.

(8.25) $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ が双関手のとき, $\mathcal{C}'$ の射 $f : a \to b$ に対して, $F(?, f) : F(?, a) \to F(?, b)$ は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手の間の自然変換である. 実際, $\mathcal{C}$ の射 $g : c \to d$ に対して, 図式

$$\begin{tikzcd} F(c,a) \arrow[r, "F(c,f)"] \arrow[d, "F(g,a)"] & F(c,b) \arrow[d, "F(g,b)"] \\ F(d,a) \arrow[r, "F(d,f)"] & F(d,b) \end{tikzcd}$$

はどちらをたどっても $F(g, f) : F(c, a) \to F(d, b)$ なので, 可換である.

(8.26) R が可換環, $f : M \to M'$ が R 線型写像のとき, $(? \otimes f) :? \otimes_R M \to ? \otimes_R M'$ は自然変換である.

(8.27) $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏のとき, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は実は双関手である ((6.11), (6.13) 参照). $f : c' \to c$ と $g : d \to d'$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c', d')$ は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g)(h) = g \circ h \circ f$ で定義する. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1_c, 1_d)(h) = 1 \circ h \circ 1 = h$ だし, $f' : c'' \to c'$ と $g' : d' \to d''$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f', g')\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g)(h) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f', g')(ghf) = g'ghff' \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(ff', g'g)(h) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((f', g') \circ (f, g)))(h). \end{aligned}$$

ここに, $(f', g') \circ (f, g)$ は, 圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$ での合成なので, $(ff', g'g)$ となる. よって $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は双関手と分かった. 従って, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, d) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, d')$ は自然変換. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, ?) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, ?) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c', ?)$ も自然変換. もちろん, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, *)$ は $\mathcal{C}(?, *)$ と書いて構わない.

(8.28) $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏のとき, $\Psi = \Psi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \underline{\mathrm{Set}})$ を $\Psi(c) = \mathcal{C}(?, c)$, $\Psi(f) = \mathcal{C}(?, f)$ で定義するとこれは関手である. この関手を**米田関手 (Yoneda functor)** という.

(8.29) R が可換環のとき, $\mathrm{Hom}_R(?, *)$ は双関手 $R\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}} \times R\,\mathrm{Mod} \to R\,\mathrm{Mod}$ を与える. よって, $\mathrm{Hom}_R(M, ?)$ は $R\,\mathrm{Mod}$ から $R\,\mathrm{Mod}$ への関手 (圏 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ 自身への関手を $\mathcal{C}$ の **endofunctor** ということがあるので, これは $R\,\mathrm{Mod}$ の endofunctor である) である. $\mathrm{Hom}_R(?, N)$ は $R\,\mathrm{Mod}$ からそれ自身への反変関手となる.

(8.30) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ が関手のとき, 合成 $G \circ F$ を考えることが出来た (6.8). F と G のどちらか (または両方) が反変関手のときにも合成 $G \circ F$ を考えることが出来る. F, G のうちの片方が共変, 片方が反変のとき, $G \circ F$ は反変関手になる. 両方反変のときは共変関手になる.

8.31 演習. R が可換環, N が R 加群のときに, $F = \mathrm{Hom}_R(?, N)$ とおく. F は $R\,\mathrm{Mod}$ からそれ自身への反変関手なので, FF は $R\,\mathrm{Mod}$ の endofunctor である. R 加群 M について, $\mathfrak{D}_M : M \to FF(M)$ を $\mathfrak{D}_M(m)(\varphi) = \varphi(m)$ ($m \in M$, $\varphi \in F(M) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$) で定めると $\mathfrak{D} : \mathrm{Id} \to FF$ は自然変換である. R が体のとき, $R\,\mathrm{Mod}$ 全体でなく, 有限次元ベクトル空間の圏 $R\,\mathrm{mod}$ に制限して考えれば, $\mathfrak{D}_R : M \to FFM$ は同型である. つまり, R が体で M が有限次元 R ベクトル空間のとき, $\mathfrak{D}_R : M \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R)$ は同型である.

8.32 補題 (米田の補題 (Yoneda's lemma)). $\mathcal{C}$ が圏, $c \in \mathcal{C}$ とし, T は $\mathcal{C}$ から $\underline{\mathrm{Set}}$ への反変関手とする. このとき, $\Phi : \mathrm{Nat}(\mathcal{C}(?, c), T) \to T(c)$ を $\Phi(\sigma) = \sigma_c(1_c)$ で定義する. このとき, Φ は全単射である.

証明. $t \in T(c)$ が与えられたとする. $\Phi(\sigma) = t$ となる σ がどれだけあるかを考える.

$c' \in \mathcal{C}$ と射 $f : c' \to c$ に対して, 図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(c,c) \arrow[r, "\sigma_c"] \arrow[d, "\mathcal{C}(f,c)"] & T(c) \arrow[d, "T(f)"] \\ \mathcal{C}(c',c) \arrow[r, "\sigma_{c'}"] & T(c') \end{tikzcd}$$

を考える. $\sigma : \mathcal{C}(?, c) \to T$ が自然変換であるためには, この図式が可換であることは必要で, $\Phi(\sigma) = t$ とすると図式の可換性により,

$$\sigma_{c'}(f) = \sigma_{c'}\mathcal{C}(f, c)(1_c) = T(f)\sigma_c(1_c) = T(f)(t)$$

となって, $\sigma_{c'}$ がすべての c' に対して t から一意的に決まってしまう. つまり Φ は単射である.

　Φ が全射であることを示すのは, このようにして t から決まった σ が実際に自然変換であることを示すことに他ならない. それには任意の $\mathcal{C}$ の射 $g : c'' \to c'$ に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c', c) & \xrightarrow{\sigma_{c'}} & T(c') \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}(g,c')} & & \downarrow{\scriptstyle T(g)} \\ \mathcal{C}(c'', c) & \xrightarrow{\sigma_{c''}} & T(c'') \end{array}$$

が可換なら良い. これは, $f \in \mathcal{C}(c', c)$ について,

$$\sigma_{c''}\mathcal{C}(g, c')(f) = \sigma_{c''}(fg) = T(fg)(t) = T(g)T(f)(t) = T(g)\sigma_{c'}(f)(t)$$

だから明白である. □

8.33 系. $\mathcal{C}$ が圏のとき, $c, c' \in \mathcal{C}$ について, $\Phi : \mathrm{Nat}(\mathcal{C}(?, c), \mathcal{C}(?, c')) \to \mathcal{C}(c, c')$ (ただし, $\Phi(\sigma) = \sigma_c(1_c)$) は全単射である. 特に, $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏のとき, 米田関手 $\Psi : \mathcal{C} \to \mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \underline{\mathrm{Set}})$ は忠実充満である. □

証明. 前半は補題で $T = \mathcal{C}(?, c')$ としたものであるから明白である. 後半は, $\Psi : \mathcal{C}(c, c') \to \mathrm{Nat}(\mathcal{C}(?, c), \mathcal{C}(?, c'))$ の定義から, $\Phi\Psi = \mathrm{id}$ であるので, 補題によって Φ が全単射なことから, その逆写像 Ψ も全単射であり, 米田関手 Ψ は忠実充満である. □

9　随伴関手

9.1 定義. 4 つ組 $(F, G, \eta, \varepsilon)$ が圏 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**随伴 (adjunction)** であるとは,

(9.1.1) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手である.

(9.1.2) $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は (F と逆向きの) 関手である.

(9.1.3) $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$, $\varepsilon : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ は自然変換.

(9.1.4) 合成

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$$

は 1_G である.

(9.1.5) 合成

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

は 1_F である.

をみたすことをいう.

(9.2) $(F,G,\eta,\varepsilon):\mathcal{C}\rightharpoonup\mathcal{D}$ が随伴である, という場合がある. (F,G) が**随伴対 (adjoint pair)** である, という言い方もする. この場合, η, ε を明示していないだけで, 上の意味で $(F,G,?,??)$ が随伴である, という意味の場合もあるし, ある η, ε について (F,G,η,ε) が随伴である, という意味のときもあるし, その場で判断するしかない. (F,G) が随伴対のとき, G は F の**右随伴関手 (right adjoint functor)** である, F は G の**左随伴関手 (left adjoint functor)** であると称する. (F,G) が随伴対であることを $F\dashv G$ と表す場合もある. $\eta:\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\to GF$ は随伴の**単位射 (unit)** という. $\varepsilon:FG\to\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ を**余単位射 (counit)** という.

(9.3) $(F,G,\eta,\varepsilon):\mathcal{C}\rightharpoonup\mathcal{D}$ が随伴ならば, $(G^{\mathrm{op}},F^{\mathrm{op}},\varepsilon,\eta):\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\rightharpoonup\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ も随伴である.

(9.4) (F,G,η,ε) が随伴 $\mathcal{C}\rightharpoonup\mathcal{D}$ とする. このとき, $c\in\mathcal{C}$, $d\in\mathcal{D}$ について,

$$\pi_{c,d}:\mathcal{D}(Fc,d)\to\mathcal{C}(c,Gd)$$

を $f\in\mathcal{D}(Fc,d)$ に対して $\pi_{c,d}(f)$ を合成

$$c\xrightarrow{\eta} GFc\xrightarrow{Gf} Gd$$

のことであるとすることにより定義する. また,

$$\rho_{c,d}:\mathcal{C}(c,Gd)\to\mathcal{D}(Fc,d)$$

を $g\in\mathcal{C}(c,Gd)$ に対して $\rho_{c,d}(g)$ を合成

$$Fc\xrightarrow{Fg} FGd\xrightarrow{\varepsilon} d$$

のことであるとすることにより定義する.

9.5 補題. $\rho_{c,d}$ は $\pi_{c,d}$ の逆写像である. さらに, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ が $\mathcal{U}$ 圏のとき,

$$\pi_{c,d}:\mathcal{D}(Fc,d)\to\mathcal{C}(c,Gd)$$

は関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{D}\to\underline{\mathrm{Set}}$ の間の自然同型である.

証明. $f \in \mathcal{D}(Fc, d)$ とすると, $\rho\pi(f)$ は

$$Fc \xrightarrow{F\pi(f)} FGd \xrightarrow{\varepsilon} d$$

の合成なので,

$$Fc \xrightarrow{F\eta} FGFc \xrightarrow{FGf} FGd \xrightarrow{\varepsilon} d$$

となる. 図式

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, bend right, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(a)}"] & FGFc \arrow[r, "FGf"] \arrow[d, "\varepsilon F"] \arrow[dr, phantom, "\text{(b)}"] & FGd \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & Fc \arrow[r, "f"] & d \end{tikzcd}$$

を考えると, (a) は随伴関手の定義 (9.1.5) により可換で, (b) は ε が自然変換であるから可換である. よって $\rho\pi(f) = f$. つまり $\rho\pi = 1$ が従う.

$(F, G, \eta, \varepsilon)$ の代わりに随伴対 $(G^{\mathrm{op}}, F^{\mathrm{op}}, \varepsilon, \eta)$ を考えると ρ と π の立場が入れ替わるので, 上の議論を適用して, $(G^{\mathrm{op}}, F^{\mathrm{op}}, \varepsilon, \eta)$ で $\rho\pi = 1$, つまり, $(F, G, \eta, \varepsilon)$ で $\pi\rho = 1$ である. 以上により, ρ は π の逆写像である.

よって, 後半のためには, π が自然変換であることを示せば良い. $h : c' \to c$ が $\mathcal{C}$ の射, $k : d \to d'$ が $\mathcal{D}$ の射とする. 図式

(9.5.1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(Fc, d) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathcal{D}(Fh,k)"] & \mathcal{C}(c, Gd) \arrow[d, "\mathcal{C}(h,Gk)"] \\ \mathcal{D}(Fc', d') \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{C}(c', Gd') \end{tikzcd}$$

が可換なことをいえば良い.

$f \in \mathcal{D}(Fc, d)$ は, $\mathcal{C}(h, Gk)\pi$ によって合成

$$c' \xrightarrow{h} c \xrightarrow{\eta} GFc \xrightarrow{Gf} Gd \xrightarrow{Gk} Gd'$$

に写る. 一方, $\pi\mathcal{D}(Fh, k)(f)$ は合成

$$c' \xrightarrow{\eta} GFc' \xrightarrow{GFh} GFc \xrightarrow{Gf} Gd \xrightarrow{Gk} Gd'$$

に写る. η が自然変換だから, 図式

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "h"] & GFc' \arrow[d, "GFh"] \\ c \arrow[r, "\eta"] & GFc \end{tikzcd}$$

が可換であり, 従って $\mathcal{C}(h, Gk)\pi(f) = \pi\mathcal{D}(Fh, k)(f)$ であり, 図式 (9.5.1) も可換である. $\square$

(9.6) $f \in \mathcal{D}(Fc, d)$ に対して, $\pi_{c,d}(f)$ を (随伴 $(F, G, \eta, \varepsilon)$ に関する) f の**右随伴射 (right adjunct)** という. 逆に, $g \in \mathcal{C}(c, Gd)$ に対して, $\pi_{c,d}^{-1}(g)$ を g の**左随伴射 (left adjunct)** という.

(9.7) 逆に, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ が $\mathcal{U}$ 圏, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が関手で, 自然同型 $\pi_{c,d} : \mathcal{D}(Fc, d) \to \mathcal{C}(c, Gd)$ が与えられているとする.

命題. $\eta_c : c \to GFc$ を $\eta_c = \pi_{c,Fc}(1_{Fc})$ で定義し, $\varepsilon_d : FGd \to d$ を $\varepsilon_d = \pi_{Gd,d}^{-1}(1_{Gd})$ で定めると, η と ε は自然変換であり, $(F, G, \eta, \varepsilon)$ は随伴であり, この随伴から作った π は, 元の与えられた π と一致する. 逆に, π が随伴から与えられた場合, π から作った随伴は元のものであり, 随伴 $(F, G, \eta, \varepsilon)$ を与えることと, (F, G, π) を与えることは同じである.

従って, (F, G, π) が随伴である, といっても差し支えない. また, 全部の自然変換を明示して, $(F, G, \pi, \eta, \varepsilon)$ が随伴である, と言っても良い.

証明. 図式

$$\begin{tikzcd}
1_{Fc} \in \mathcal{D}(Fc, Fc) \arrow[r, "(Ff)_*"] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{D}(Fc, Fc') \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{D}(Fc', Fc') \ni 1_{Fc'} \arrow[l, "(Ff)^*"'] \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{C}(c, GFc) \arrow[r, "(GFf)_*"] & \mathcal{C}(c, GFc') & \mathcal{C}(c', GFc') \arrow[l, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

は π の自然性により可換である. よって,

$$\begin{aligned}
(GFf) \circ \eta_c = (GFf)_* \pi(1_{Fc}) = \pi(Ff)_*(1_{Fc}) = \pi(Ff) \\
= \pi(Ff)^*(1_{Fc'}) = f^* \pi(1_{Fc'}) = \eta_{c'} f.
\end{aligned}$$

つまり図式

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "f"] & GFc \arrow[d, "GFf"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}"] & GFc'
\end{tikzcd}$$

は可換である. つまり $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ は自然変換である.

双対圏で同じ議論をすれば, $\varepsilon : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ も自然変換と分かる.

次に $d \in \mathcal{D}$ に対して, π の自然性により, 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(FGd, FGd) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varepsilon_*"] & \mathcal{C}(Gd, GFGd) \arrow[d, "(G\varepsilon)_*"] \\
\mathcal{D}(FGd, d) \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{C}(Gd, Gd)
\end{tikzcd}$$

は可換である. $1_{FGd} \in \mathcal{D}(FGd, FGd)$ の行き先を 2 通りに書けば分かる通り,

$$Gd \xrightarrow{\eta G} GFGd \xrightarrow{G\varepsilon} Gd$$

の合成は恒等射 1_{Gd} である. 双対圏で同じ議論をすることにより, $c \in \mathcal{C}$ について,

$$Fc \xrightarrow{F\eta} FGFc \xrightarrow{\varepsilon F} Fc$$

が恒等射と分かる.

以上により, $(F, G, \eta, \varepsilon)$ は随伴である.

この随伴から作った π を π' とする. $c \in \mathcal{C}$, $d \in \mathcal{D}$, $f \in \mathcal{D}(Fc, d)$ に対して, $\pi'(f)$ は

$$c \xrightarrow{u} GFc \xrightarrow{Gf} Gd$$

の合成だった. π の自然性によって図式

$$\begin{array}{ccc} D(Fc, Fc) & \xrightarrow{\pi} & C(c, GFc) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle (Gf)_*} \\ D(Fc, d) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C}(c, Gd) \end{array}$$

は可換. 1_{Fc} の行き先を調べることで, $\pi'(f) = \pi(f)$ を得る. よって $\pi' = \pi$ である.

逆に随伴 $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ が与えられ, それから π を作り, (F, G, π) から $(F, G, \eta', \varepsilon')$ を作ったとする. すると $c \in \mathcal{C}$ に対して $\eta'_c = \pi_{c,Fc}(1_{Fc})$ は

$$c \xrightarrow{\eta} GFc \xrightarrow{G1_{Fc}} GFc$$

なので, $\eta' = \eta$ である. 双対圏で議論することにより, $\varepsilon' = \varepsilon$ である. $\square$

(9.8) 忘却関手 $U : \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Set}}$ の左随伴 F が存在するとき, 集合 X に対して $F(X)$, もしくは $F(X)$ と同型な $\mathcal{C}$ の対象を $\mathcal{C}$ の**自由対象 (free object)** と呼ぶことがある.

9.9 例. R が可換環, $\mathcal{C} = R\,\mathrm{Mod}$ のとき, $X \in \underline{\mathrm{Set}}$ に対して $F(X)$ は X を自由基底に持つ R 自由加群とする. 形式的には,

$$F(X) := \{\varphi \in \mathrm{Map}(X, R) \mid \#\{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\} < \infty\}$$

とし, $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $(r\varphi)(x) = r(\varphi(x))$ と定義する. $f \in R\,\mathrm{Mod}(F(X), M)$ に対して, $\pi(f)(x) = f(\eta_X(x))$ で $\pi(f) \in \underline{\mathrm{Set}}(X, UM)$ を定

める ($U : R\,\mathrm{Mod} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は忘却関手). ここに, $\eta_X(x)$ は $\eta_X(x)(y) = \delta_{x,y}$ (Kronecker のデルタ) で定まる $F(X)$ の元である. 逆に $h \in \underline{\mathrm{Set}}(X, UM)$ が与えられたら, $\rho(h)(\varphi) = \sum_{x \in X} \varphi(x)h(x)$ (実質有限和) で $\rho(h) \in R\,\mathrm{Mod}(F(X), M)$ を定義する. π は自然変換で, ρ は π の逆写像となり, (F, U, π) は随伴である.

$F(X)$ は次の**普遍性 (universality)** を持つ.

(9.9.1) 指定された集合の射 $\eta_X : X \to UF(X)$ がある.

(9.9.2) 他に集合の射 $\varphi : X \to UM$ があれば, ある R 準同型 $f : F(X) \to M$ が一意的に存在して, $\varphi = U(f) \circ \eta_X$ である.

左随伴を見つけることは, このような普遍性を持つ対象を見つけることと実質同じである.

9.10 演習. 忘却関手 $U : \underline{\mathrm{CRng}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ の左随伴 F はどんなものか.

(9.11) 箙 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ と $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ に対して, $F : Q \to Q'$ が箙の射であるとは, $F = (Q, Q', F_0, F_1)$ で, $F_0 : Q_0 \to Q'_0$ と $F_1 : Q_1 \to Q'_1$ は写像で, $s'F_1 = F_0 s$, $t'F_1 = F_0 t$ をみたしているもの, として定義する. $F = (Q, Q', F_0, F_1)$ と $F' = (Q', Q'', F'_0, F'_1)$ の合成は $F' \circ F = (Q, Q'', F'_0 \circ F_0, F'_1 \circ F_1)$ で定義する. これにより小さい箙の全体は圏になる. これを箙の圏と呼び, $\underline{\mathrm{Qv}}$ で書こう. $\mathrm{Quiver} : \underline{\mathrm{Cat}} \to \underline{\mathrm{Qv}}$ が射の合成 $\circ$ を忘れる, という形で定義される. (2.2) 参照.

(9.12) 箙 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ に対して, 圏 $\mathrm{Free}(Q)$ を次のように定める. $\mathrm{Ob}(\mathrm{Free}(Q)) = Q_0$, $\mathrm{Mor}(\mathrm{Free}(Q)) = \coprod_{n \geq 0} \{n\} \times \mathcal{M}_n(Q)$ とおく.

$$s(n; f_1, \ldots, f_n) = s(f_n), \qquad t(n; f_1, \ldots, f_n) = t(f_1) \qquad (n \geq 1)$$

とおく. また, $s(0; v) = t(0; v) = v$ ($v \in Q_0 = \mathcal{M}_0(Q)$) とおく. 合成は, $s(f_n) = t(g_1)$ のとき,

$$(n; f_1, \ldots, f_n) \circ (m; g_1, \ldots, g_m) = (n + m; f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m)$$

で定める. また,

$$(n; f_1, \ldots, f_n)(0; s(f_n)) = (n; f_1, \ldots, f_n) = (0; t(f_1))(n; f_1, \ldots, f_n)$$

と定め, 最後に $(0; v)(0; v) = (0; v)$ と定める. これで圏になっていることは容易である. $(0; v)$ と書いた射が 1_v ($v \in Q_0$) である.

$\mathrm{Free}(Q)$ を箙 Q が生成する**自由圏 (free category)**, あるいは, Q の**道の圏 (path category)** という. 箙の射 $F : Q \to Q'$ に対して, $\mathrm{Free}(F)$:

$\mathrm{Free}(Q) \to \mathrm{Free}(Q')$ は $\mathrm{Free}(F)_0 = F_0 : Q_0 \to Q'_0$, $\mathrm{Free}(F)_1(n; f_1, \ldots, f_n) = (n; F_1(f_1), \ldots, F_1(f_n))$, $\mathrm{Free}(F)_1(0; v) = (0; F_0(v))$ で定める．これで $\mathrm{Free} : \underline{\mathrm{Qv}} \to \underline{\mathrm{Cat}}$ が関手になっていることは明らかであろう．

9.13 演習. $\mathrm{Free} \dashv \mathrm{Quiver}$ である．

(9.14) 上記の対応で, Free は点が 1 点だけの箙 (矢の集合の情報しかないから, 実質一つの集合) を対象が 1 つだけの圏 (つまりモノイド) に写し, Quiver は逆にモノイドに対してその積を忘れて集合を対応させる忘却関手である．よって, 上の Free はモノイドから集合を与える忘却関手の左随伴を与える．集合 X に対して, $\mathrm{Free}(X)$ を X で生成された**自由モノイド (free monoid)** という．

9.15 演習. 可換 $\mathbb{Q}$ 代数の圏 $\mathbb{Q}\,\mathrm{CAlg}$ から可換環の圏 $\underline{\mathrm{CRng}}$ への包含関手 $i : \mathbb{Q}\,\mathrm{CAlg} \to \underline{\mathrm{CRng}}$ の左随伴関手 F を構成せよ．またこのとき, $F(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ は何か.

9.16 例. R が可換環, M が R 加群とする．$F = ? \otimes_R M : R\,\mathrm{Mod} \to R\,\mathrm{Mod}$, $G = \mathrm{Hom}_R(M, ?) : R\,\mathrm{Mod} \to R\,\mathrm{Mod}$ とする．このとき, $F \dashv G$ である．

証明. $N, L \in R\,\mathrm{Mod}$ に対して,

$$\pi_{N,L} : \mathrm{Hom}_R(N \otimes_R M, L) \to \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M, L))$$

を $((\pi_{N,L}\varphi)(n))(m) = \varphi(n \otimes m)$ で定める．実際, $\varphi(n \otimes ?)$ は R 線型写像 $M \to L$ を与える．また,

$$\varphi((rn + r'n') \otimes ?) = r\varphi(n \otimes ?) + r'\varphi(n' \otimes ?)$$

も容易であり, $\pi_{N,L}\varphi$ は確かに $\mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M, L))$ の元である．また, $r, r' \in R$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(N \otimes_R M, L)$ に対して,

$$\begin{aligned}((\pi_{N,L}(r\varphi + r'\psi))(n))(m) &= r\varphi(n \otimes m) + r'\psi(n \otimes m) \\ &= (r\pi_{N,L}(\varphi)(n) + r'\pi_{N,L}(\psi)(n))(m)\end{aligned}$$

が任意の $m \in M$ について成り立つから,

$$\pi_{N,L}(r\varphi + r'\psi)(n) = r\pi_{N,L}(\varphi)(n) + r'\pi_{N,L}(\psi)(n) = (r\pi_{N,L}(\varphi) + r'\pi_{N,L}(\psi))(n)$$

が任意の $n \in N$ について成り立ち,

$$\pi_{N,L}(r\varphi + r'\psi) = r\pi_{N,L}(\varphi) + r'\pi_{N,L}(\psi)$$

となり, π は R 線型である.

π が自然変換であることを示す. $f : N' \to N$ と $g : L \to L'$ が R 線型写像のとき,

$$\begin{aligned}((\mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{Hom}_R(M, g))\pi_{N,L}(\varphi))(n'))(m) &= g(\pi_{N,L}(\varphi)(f(n'))(m)) \\ = g(\varphi(fn' \otimes m)) &= (\mathrm{Hom}_R(f \otimes M, g)(\varphi))(n' \otimes m) \\ &= ((\pi_{N',L'} \mathrm{Hom}_R(f \otimes M, g)(\varphi))(n'))(m)\end{aligned}$$

であるから,

$$\mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{Hom}_R(M, g))\pi_{N,L} = \pi_{N',L'} \mathrm{Hom}_R(f \otimes M, g),$$

すなわち, π は自然変換である.

最後に π が自然同型であることを示す. そのためには, $\pi_{N,L}$ が逆写像を持てば良い.

$$\rho_{N,L} : \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M, L)) \to \mathrm{Hom}_R(N \otimes_R M, L)$$

を $(\rho_{N,L}(h))(n \otimes m) = (h(n))(m)$ で定義する. 実際, $(n, m) \mapsto (h(n))(m)$ は R 双線型なので, $\rho_{N,L}(h)$ が R 線型写像として一意的に定まる.

$$(\rho_{N,L}\pi_{N,L}\varphi)(n \otimes m) = ((\pi_{N,L}\varphi)(n))(m) = \varphi(n \otimes m)$$

だから, $\rho_{N,L} \circ \pi_{N,L} = 1$. また,

$$((\pi_{N,L}\rho_{N,L}h)(n))(m) = (\rho_{N,L}h)(n \otimes m) = (h(n))(m)$$

だから, $\pi_{N,L} \circ \pi_{N,L} = 1$. よって $\rho_{N,L}$ は $\pi_{N,L}$ の逆写像である. $\square$

(9.17) 上の随伴の例について, 単位射と余単位射を記述しよう. 単位射 $\mathrm{tr} : N \to \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R M)$ は上での $\pi(1_{N \otimes M})$ だから, $\mathrm{tr}(n)(m) = n \otimes m$ で与えられる. この写像 tr を**トレース写像 (trace map)** という. 余単位射 $\mathrm{ev} : \mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_R M \to N$ は, 上での $\rho(1_{\mathrm{Hom}_R(M,N)})$ だから, $\mathrm{ev}(f \otimes m) = f(m)$. この写像 ev を**評価写像 (evaluation map)** という.

(9.18) $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ が随伴で, $(F', G', \eta', \varepsilon') : \mathcal{D} \rightharpoonup \mathcal{E}$ も随伴とする. このとき, $(F'F, GG', (G\eta'F) \bullet \eta, \varepsilon' \bullet (F'\varepsilon G'))$ も随伴である. これを随伴 $(F, G, \eta, \varepsilon)$ と随伴 $(F', G', \eta', \varepsilon')$ の**合成 (composite)** という.

9.19 例. R が可換環とする. 可換 R 代数の圏を $R\,\mathrm{CAlg}$ で表す. $V : R\,\mathrm{CAlg} \to R\,\mathrm{Mod}$ を, 可換 R 代数 A を, 単なる R 加群と見直す, という関手とする (一種の忘却関手である). R 加群 M に対して, $\mathrm{Sym}\, M$ は M の対称多元環とする. $\mathrm{Sym}\, M$ はテンソル代数 $TM = \bigoplus_{i\geq 0} M^{\otimes i}$ を関係式 $m\otimes m' - m'\otimes m$ で生成される両側イデアルで割って得られる可換 R 代数である. $\mathrm{Sym} : R\,\mathrm{Mod} \to R\,\mathrm{CAlg}$ は関手になり, V の左随伴関手である.

$(F, U) : \underline{\mathrm{Set}} \rightharpoonup R\,\mathrm{Mod}$ を例 9.9 における随伴とすると, 随伴の合成 $(\mathrm{Sym}\circ F, U\circ V)$ も随伴対である. $U \circ V$ は $R\,\mathrm{CAlg}$ から $\underline{\mathrm{Set}}$ への忘却関手である. $(\mathrm{Sym}\circ F)(X)$ は簡単に分かるように, X の元を変数に持つ R 上の多項式環に同型である.

(9.20) $(F, G, \pi, \eta, \varepsilon)$, $(F', G', \pi', \eta', \varepsilon')$ が随伴 $\mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ とする. このとき, 2 つの自然変換 $\sigma : F \to F'$ と $\tau : G' \to G$ が**共役 (conjugate)** であるとは, すべての $c\in\mathcal{C}$ と $d \in \mathcal{D}$ に対して,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(F'c,d) \arrow[r, "\pi'", "\cong"'] \arrow[d, "\sigma_c^*"] & \mathcal{C}(c,G'd) \arrow[d, "(\tau_d)_*"] \\ \mathcal{D}(Fc,d) \arrow[r, "\pi", "\cong"'] & \mathcal{C}(c,Gd) \end{tikzcd} \tag{9.20.1}$$

が可換であることをいう. σ は τ の**左共役 (left conjugate)**, τ は σ の**右共役 (right conjugate)** という言い方もする. (σ,τ) が共役ともいう. 図式 (9.20.1) の水平な射は同型なので, 自然変換 $\sigma : F \to F'$ が与えられれば, d を固定する毎に, (9.20.1) を関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ の可換図式にするような射 $\tau_d : G'd \to Gd$ が, 米田の補題 (補題 8.32) によって一意的に存在する.

9.21 補題. $(F, G, \pi, \varepsilon, \eta)$, $(F', G', \pi', \varepsilon', \eta')$ は随伴 $\mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ とする.

(9.21.1) $\sigma : F \to F'$ が自然変換ならば, σ の右共役である自然変換 $\tau : G' \to G$ が一意的に存在する. τ は合成

$$G' \xrightarrow{\eta} GFG' \xrightarrow{\sigma} GF'G' \xrightarrow{\varepsilon'} G \tag{9.21.2}$$

で与えられる.

(9.21.3) $\tau : G' \to G$ が自然変換ならば, τ の左共役である自然変換 $\sigma : F \to F'$ が一意的に存在する. σ は合成

$$F \xrightarrow{\eta'} FG'F' \xrightarrow{\tau} FGF' \xrightarrow{\varepsilon} F'$$

で与えられる.

証明. (9.21.1). 上に述べたように, 図式 (9.20.1) を可換にするような $(\tau_d)_{d\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})}$ は一意的に存在する. よってこの (τ_d) が実際に合成 (9.21.2) で与えられることをいえば, $\tau=(\tau_d)$ が (自然変換の合成だから) 自然変換であることも明らかになり, 証明が完結する.

$\tau_d\in\mathcal{C}(G'd,Gd)$ は, 図式 (9.20.1) で, $c=G'd$ として, 右上隅の $\mathcal{C}(G'd,G'd)$ の元 $1_{G'd}$ が右下隅に写った像である. よって,

$$\tau_d=\pi\sigma^*_{G'd}(\pi')^{-1}(1_{Gd})=\pi\sigma^*_{G'd}(\varepsilon'_d)=\pi(\varepsilon'_d\sigma_{G'd})=(G\varepsilon'_d)\circ(G\sigma_{G'd})\circ\eta_{G'd}$$

となって求める結果を得る.

(9.21.3) は (9.21.1) の双対な言明である. □

9.22 補題. $(F,G,\pi,\eta,\varepsilon)$, $(F',G',\pi',\eta',\varepsilon')$ が随伴 $\mathcal{C}\rightharpoonup\mathcal{D}$ とし, $\sigma:F\to F'$ と $\tau:G'\to G$ は共役とする. このとき,

(9.22.1) すべての $c\in\mathcal{C}$ について σ_c が全射 $\Leftrightarrow$ すべての $d\in\mathcal{D}$ について τ_d が単射

(9.22.2) すべての $d\in\mathcal{D}$ について τ_d が分裂全射 $\Leftrightarrow$ すべての $c\in\mathcal{C}$ について σ_c が分裂単射

証明. (9.22.1) は全射と単射の定義から明白である.

(9.22.2) は補題 7.22 と補題 7.23 から明らかである. □

9.23 補題. $(F,G,\pi,\eta,\varepsilon)$, $(F',G',\pi',\eta',\varepsilon')$ が随伴 $\mathcal{C}\rightharpoonup\mathcal{D}$ で $\sigma:F\to F'$ と $\tau:G'\to G$ が自然変換とするとき, 次は同値.

(9.23.1) (σ,τ) が共役.

(9.23.2) τ が合成

$$G'\xrightarrow{\eta}GFG'\xrightarrow{\sigma}GF'G'\xrightarrow{\varepsilon'}G$$

である.

(9.23.3) σ が合成

$$F\xrightarrow{\eta'}FG'F'\xrightarrow{\tau}FGF'\xrightarrow{\varepsilon}F'$$

である.

(9.23.4) 図式

$$\begin{tikzcd} FG' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sigma"] & FG \arrow[d, "\varepsilon"] \\ F'G' \arrow[r, "\varepsilon'"] & \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \end{tikzcd}$$

は可換である.

(9.23.5) 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta'"] & GF \arrow[d, "\sigma"] \\
G'F' \arrow[r, "\tau"] & GF'
\end{tikzcd}$$

は可換である.

証明. (9.23.1)⇔(9.23.2)⇔(9.23.3) は補題 9.21 から明らかである.

(9.23.2)⇒(9.23.4). 図式

$$\begin{tikzcd}
FG' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\eta"] \arrow[dd, bend right=90, looseness=1.5, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(b)}"] & FG \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "\text{(c)}"] & \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \\
FGFG' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[l, phantom, "\text{(a)}"] \arrow[dr, phantom, "\text{(d)}"] & FGF'G' \arrow[u, "\varepsilon'"'] \arrow[r, "\varepsilon"] & F'G' \arrow[u, "\varepsilon'"'] \\
FG' \arrow[rr, "\sigma"] & & F'G' \arrow[u, equal, phantom]
\end{tikzcd}$$

を考える. (a) は随伴の定義で可換. (b) は仮定により可換. (c), (d) は ε の自然性により可換. よって問題の図式は可換である.

(9.23.4)⇒(9.23.2). 図式

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, phantom, "\text{(a)}"] & G \arrow[d, "\eta"] \arrow[dd, bend left=90, looseness=1.5, "1"] \\
GFG' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "\text{(c)}"] & GFG \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[r, phantom, "\text{(b)}"] & {} \\
GF'G' \arrow[r, "\varepsilon'"] & G
\end{tikzcd}$$

を考えると, (a) は η の自然性により可換. (b) は随伴関手の定義で可換. (c) は仮定により可換. よって問題の図式は可換となる.

(9.23.3)⇔(9.23.5) は今示した (9.23.2)⇔(9.23.4) の双対な言明である. □

9.24 例. R が可換環, $f : M \to M'$ は R 準同型とする. $(?\otimes_R M, \mathrm{Hom}_R(M, ?))$ と $(?\otimes_R M', \mathrm{Hom}_R(M', ?))$ は随伴対であった (例 9.16 および (9.17) を参照).

$?\otimes f :?\otimes M \to ?\otimes M'$ は自然変換であるから, その右共役 $\tau : \mathrm{Hom}_R(M', ?) \to \mathrm{Hom}_R(M, ?)$ が存在する. これは, $N \in R\,\mathrm{Mod}$ について,

$$\mathrm{Hom}_R(M', N) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(M', N) \otimes M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(M, 1\otimes f)} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(M', N) \otimes M') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{ev})} \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

と合成したものである. $g \in \mathrm{Hom}_R(M', N)$ は $m \mapsto g \otimes m$ に写り, これは, $m \mapsto g \otimes fm$ に写り, これは, $m \mapsto g(fm)$, つまり, gf に写る. つまり, $f\otimes ?$ の右共役は, $f^* = \mathrm{Hom}_R(f, ?)$ であった.

9.25 補題. (F, G, π), (F', G', π'), (F'', G'', π'') は随伴 $\mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ とする.

(9.25.1) $1_F : F \to F$ と $1_G : G \to G$ は共役である.

(9.25.2) $\sigma : F \to F'$ と $\tau : G' \to G$ が共役で, $\sigma' : F' \to F''$ と $\tau' : G'' \to G'$ が共役のとき, $\sigma' \bullet \sigma$ と $\tau \bullet \tau'$ は共役である.

証明. いずれも共役の定義から明白である. □

9.26 系. (F, G, π), (F', G', π') は随伴 $\mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ とし, $\sigma : F \to F'$ と $\tau : G' \to G$ は共役とする. このとき, σ が自然同型であることと τ が自然同型であることは同値で, このとき, σ^{-1} と τ^{-1} も共役である.

証明. σ が自然同型として, σ^{-1} の右共役を α とすると, $1_F = \sigma^{-1} \bullet \sigma$ と $\tau \bullet \alpha$ が (9.25.2) により共役で, (9.25.1) により, $\tau \bullet \alpha = 1_G$ でなければならない. また, $1_{F'} = \sigma \bullet \sigma^{-1}$ と $\alpha \bullet \tau$ も共役だから, $\alpha \bullet \tau = 1_{G'}$. よって, $\alpha = \tau^{-1}$ であり, σ^{-1} と τ^{-1} は共役である.

τ が自然同型だとして同様の結論が得られることは, 双対な言明である. □

9.27 定理 (随伴関手の一意性). $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手で, G と G' が F の右随伴関手であれば, $G \cong G'$ である.

証明. 随伴 (F, G) と (F, G') に関する自然同型 $1_F : F \to F$ の右共役 $\tau : G' \to G$ は系 9.26 によって自然同型である. □

9.28 系. $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が関手で, F と F' が G の左随伴関手であれば, $F \cong F'$ である.

証明. 定理 9.27 の双対な言明である. □

10　圏同値

(10.1)　関手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ に対して, 関手 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ が F の**逆** **(inverse)** であるとは, $G\circ F=\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, $F\circ G=\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ が成立することをいう. 逆が存在する関手は同型関手という. $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への同型関手が存在するとき, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は同型である, という.

(10.2)　$\mathcal{C}$ が圏のとき, $\mathcal{C}'$ を $\mathcal{C}$ の射の圏とする. $\Phi:\mathrm{Func}(\mathbf{2},\mathcal{C})\to\mathcal{C}'$ を $\Phi(F)=F((1,0))$ で定義し, $\Phi(\sigma)=(\sigma_0,\sigma_1)$ で定める. $\Psi:\mathcal{C}'\to\mathrm{Func}(\mathbf{2},\mathcal{C})$ を, $\Psi(f)(1,0)=f$ (だから $\Psi(f)(0)=s(f)$, $\Psi(f)(1)=t(f)$) で定義し, $\Psi(h,k)_0=h$, $\Psi(h,k)_1=k$ で定義する. すると Ψ は Φ の逆であり, $\mathcal{C}'$ と $\mathrm{Func}(\mathbf{2},\mathcal{C})$ は同型である.

(10.3)　同型よりもう少し緩い概念の同値の方が重要である. 関手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が**同値** **(equivalence)** であるとは, ある $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ が存在して, 自然同型 $FG\cong\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, $GF\cong\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ が存在することを言う. このような G を F の**準逆** **(quasi-inverse)** という. $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が同値で $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ が準逆のとき, G も同値で, F は G の準逆である.

$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が同値で, G と G' が共に F の準逆であるとき, $G\cong G'$ である. 実際, $G\cong\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}G\cong G'FG\cong G'\,\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}\cong G'$.

また, $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が同値であることの必要十分条件は, $F^{\mathrm{op}}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ が同値であることである.

(10.4)　$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への同値が存在するとき, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は**同値** **(equivalent)** あるいは**圏同値** **(categorically equivalent)** であるという. 反変関手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ について, これが同値 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}$ を与えているとき, F は**反変同値** **(contravariant equivalence)** であるといい, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は**反変同値** **(contravariantly equivalent)** であるという. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ は同値である. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が同値ならば, $\mathcal{D}$ と $\mathcal{C}$ は同値である. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が反変同値ならば, $\mathcal{D}$ と $\mathcal{C}$ は反変同値である.

10.5 補題. $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ と $F':\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ が同値ならば, $F'\circ F:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$ も同値である. より詳しく, G が F の準逆で G' が F' の準逆とすると $G\circ G'$ は $F'\circ F$ の準逆である. 圏の集合 $\mathcal{V}$ が与えられたとき, 同値は $\mathcal{V}$ の同値関係になる.

証明. 前半を示せば十分である. $GG'F'F\cong G\,\mathrm{Id}\,F\cong GF\cong\mathrm{Id}$, $F'FGG'\cong F'\,\mathrm{Id}\,G'\cong F'G'\cong\mathrm{Id}$. □

(10.6) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手とする. このとき,

$$\{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \mid \exists C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\ F(C) \cong D\}$$

を F の**本質的像 (essential image)** といい, $\mathrm{EIm}(F)$ で表す. 時に, $\mathrm{EIm}(F)$ を対象の集合に持つ $\mathcal{D}$ の充満部分圏をも同じ $\mathrm{EIm}(F)$ で表し, F の本質的像と呼ぶ. $\mathrm{EIm}(F) = \mathcal{D}$ の時, F が**同型稠密 (isomorphism-dense)**, または**本質的に全射 (essentially surjective)**, または**稠密 (dense)** であるという. 埋入が同型稠密である部分圏 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ は, 同型稠密な (または単に稠密な) 部分圏であるという. 単なる稠密, と言う言葉は [McL] では全然違う意味に用いられているので, 我々も同型稠密を単に稠密とは呼ばないことにする.

10.7 演習. $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ が関手とする.

(10.7.1) $F \cong F'$ で F' が忠実ならば F は忠実.

(10.7.2) $F \cong F'$ で F' が充満ならば F は充満.

(10.7.3) $F \cong F'$ で F' が同型稠密ならば F は同型稠密.

(10.7.4) F と G が忠実ならば $G \circ F$ も忠実.

(10.7.5) $G \circ F$ が忠実ならば F は忠実.

(10.7.6) $G \circ F$ が忠実で F が忠実充満かつ同型稠密ならば G は忠実.

(10.7.7) F と G が充満ならば $G \circ F$ も充満.

(10.7.8) $G \circ F$ が充満, F が同型稠密ならば G は充満.

(10.7.9) $G \circ F$ が充満, G が忠実充満ならば F は充満.

(10.7.10) 恒等関手 $\mathrm{Id} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ は忠実充満かつ同型稠密.

(10.7.11) F と G が同型稠密ならば, $G \circ F$ も同型稠密.

(10.7.12) $G \circ F$ が同型稠密ならば, G は同型稠密.

(10.8)　随伴 $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ が**随伴同値 (adjoint equivalence)** であるとは, $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ と $\varepsilon : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ がともに自然同型であることをいう. $(F, G, \eta, \varepsilon)$ が随伴同値ならば, F は同値で G はその準逆である.

10.9 演習. $(F, G, \eta, \varepsilon)$ が随伴同値のとき, $(G, F, \varepsilon^{-1}, \eta^{-1})$ も随伴同値である.

10.10 補題. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が忠実充満関手で, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は関手で, $\varepsilon : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ は自然同型とする. このとき, $(F, G, \eta, \varepsilon)$ が随伴同値となる自然同型 $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ が一意的に存在する.

証明. 各 $c \in \mathcal{C}$ について, $\varepsilon_{Fc}^{-1} : Fc \to FGFc$ の, 同型 $F : \mathcal{C}(c, GFc) \to \mathcal{D}(Fc, FGFc)$ の逆写像 F^{-1} による像 $F^{-1}(\varepsilon_{Fc}^{-1}) \in \mathcal{C}(c, GFc)$ を $\eta_c : c \to GFc$ と定める. $f : c \to c'$ が $\mathcal{C}$ の射のとき, 図式

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "f"'] & GFc \arrow[d, "GFf"] \\ c' \arrow[r, "\eta_{c'}"] & GFc' \end{tikzcd}$$

を考える. この図式に一斉に F を適用すると, ε^{-1} が自然変換だから可換図式になる. F が忠実だから, この図式が元から可換でなければならない. つまり η は自然変換である. 各 η_c は (7.26.3) によって同型射なので, η は自然同型である. 以上により, F は同値であり, 準逆 G も同値である.

　η の定義により,

(10.10.1)
$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

の合成は 1_F である.

　次に, 図式

$$\begin{tikzcd} FGFG \arrow[r, "\varepsilon FG"] \arrow[d, "FG\varepsilon"'] & FG \arrow[d, "\varepsilon"] \\ FG \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \end{tikzcd}$$

は ε が自然変換だから可換である. ところで ε は自然同型なので, 図式の可換性により, $FG\varepsilon = \varepsilon FG$ である. (10.10.1) により, 合成

$$FG \xrightarrow{F\eta G} FGFG \xrightarrow{\varepsilon FG} FG$$

は 1_{FG} である. この合成射の中に現れる εFG は $FG\varepsilon$ なので, 合成

$$FG \xrightarrow{F\eta G} FGFG \xrightarrow{FG\varepsilon} FG$$

が 1_{FG}. F が忠実なので,

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$$

の合成が 1_G. 以上により, $(F, G, \eta, \varepsilon)$ は随伴である. η, ε が自然同型であることは既に見たので, $(F, G, \eta, \varepsilon)$ は随伴同値である.

η を上のように定義しなければならないことは, ε が自然同型であることと (10.10.1) の要請から明白であり, η は一意的である. □

10.11 系. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手で, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が忠実充満関手で, $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ は自然同型とする. このとき, $(F, G, \eta, \varepsilon)$ が随伴同値となる自然同型 $\varepsilon : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ が一意的に存在する.

証明. 補題 10.10 の双対言明である. □

10.12 定理. 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について次は同値である.

(10.12.1) F は同値である.

(10.12.2) F が忠実充満かつ同型稠密である.

(10.12.3) F はある随伴同値 $(F, G, \eta, \varepsilon)$ の一部である.

証明. (10.12.1)⇒(10.12.2). $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を準逆とする. $GF \cong \mathrm{Id}$ で Id は (10.7.10) により忠実だから GF も (10.7.1) により忠実で, 従って F も (10.7.5) によって忠実. また, Id が同型稠密なので, (10.7.3) によって GF も同型稠密. よって (10.7.12) によって G も同型稠密. G は同値で F がその準逆なので, F と G の立場を入れ替えて議論すれば, F も同型稠密と分かる. $FG \cong \mathrm{Id}$ で Id が (10.7.10) によって充満なので, FG も (10.7.2) によって充満. G が同型稠密だったから, (10.7.8) によって F は充満.

(10.12.2)⇒(10.12.3). 各 $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して, $Fc \cong d$ となる c が存在する. 選択公理で各 d に対してそのような $c = Gd$ と同型 $\sigma_d : FGd = Fc \to d$ を一斉に選択し, $G : \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と, $\sigma : \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ を, σ_d が FGd から d への同型射であるように選べる. $\mathcal{D}$ の射 $f : d \to d'$ に対して, $\sigma_{d'}^{-1} f \sigma_d$ は FGd から FGd' への射. $F : \mathcal{C}(Gd, Gd') \to \mathcal{D}(FGd, FGd')$ は全単射なので, 逆写像 F^{-1} がある. そこで, $Gf = F^{-1}(\sigma_{d'}^{-1} f \sigma_d)$ と定義することにより, $G : \mathcal{D}(d, d') \to \mathcal{C}(Gd, Gd')$ を定義する.

$d \in \mathcal{D}$ に対して, $FG(1_d) = \sigma_d^{-1} 1_d \sigma_d = 1_{FGd}$. $F1_{Gd} = 1_{FGd}$ だから, $G(1_d) = 1_{Gd}$. また, $f : d \to d'$, $g : d' \to d''$ について,

$$F(G(gf)) = \sigma_{d''}^{-1} g f \sigma_d = \sigma_{d''}^{-1} g \sigma_{d'} \sigma_{d'}^{-1} f \sigma_d = F(Gg) F(Gf) = F(Gg \circ Gf).$$

よって $G(gf) = Gg \circ Gf$. 以上により, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は関手になった. $\sigma_{d'}(FGf) = f \circ \sigma_d$ であるから, $\sigma : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ は自然同型となる. F は忠実充満なので, 補題 10.10 によって, $(F, G, \eta, \varepsilon)$ が随伴同値となる η が存在する.

(10.12.3)⇒(10.12.1) は自明である. □

(10.13) $\mathcal{C}$ が圏, $\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ の部分圏とする. 包含関手 $i : \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ が同値であるための必要十分条件は, $\mathcal{D}$ が充満部分圏で, 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して, ある $d \in \mathcal{D}$ が存在して $d \cong c$ となることである. このとき, 随伴同値 $(i, G, \eta, \varepsilon)$ で, $Gi = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} = Gi$ が $1_{\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}}$ であるように取ることが出来る. これは定理 10.12 の証明をもう少し細かくみれば分かる.

(10.14) 圏 $\mathcal{D}$ が**骨格的 (skeltal)** であるとは, $d, d' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, $d \cong d'$ ならば, $d = d'$ が成り立つことをいう. 圏 $\mathcal{C}$ の各同型類から一つずつ代表元を取って $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の部分集合を作り, その部分集合から決まる充満部分圏を作れば, 骨格的かつ同型稠密な充満部分圏が得られる. このような充満部分圏 $\mathcal{D}$ を $\mathcal{C}$ の**骨格 (skelton)** という. もちろんこのとき $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ は同値である. 小さい圏と同値な圏は**骨格的に小さい (skeletally small)** とか, **svelte** (ほっそりした, すらりとしたとかいった意味のフランス語 (英語にもなっている) だが, 数学用語としての日本語訳は知らない) などという. 小さい骨格を持てば, 骨格的に小さい.

10.15 例. 小さい有限全順序集合のなす圏 $\underline{\mathrm{FOrd}}$ の中で, $\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots\}$ を対象の集合にする充満部分圏は骨格である. $\mathbb{N}$ は小さいので, $\underline{\mathrm{FOrd}}$ は骨格的に小さい. ただし, $\underline{\mathrm{FOrd}}$ 自身は小さくない. 骨格的に小さいからといって小さいとは限らない.

10.16 例. k が体のとき, 有限次元 k ベクトル空間の圏 $k\,\mathrm{mod}$ を考え, 反変関手 $F : \mathrm{mod} \to \mathrm{mod}$ を $F = \mathrm{Hom}_k(?, k)$ で定める. $\mathfrak{D} : \mathrm{Id} \to F \circ F$ は自然同型だったから, F は F 自身を準逆に持つ反変同値である.

10.17 例. $\mathcal{C}$ は $\mathcal{U}$ 圏とする. 反変関手 $F : \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が**表現可能 (representable)** であるとは, 圏 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \underline{\mathrm{Set}})$ において, $F \cong \mathcal{C}(?, c)$ となる $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在することをいう. 米田関手 $\Psi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \underline{\mathrm{Set}})$ は米田の補題で忠実充満だった. よって, $\Psi_{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ から表現可能関手全体への関手を引き起こし, これは忠実充満かつ同型稠密. つまり同値である.

10.18 演習. 小さい擬順序集合と小さい擬順序を保つ写像のなす圏を $\underline{\mathrm{POrd}}$ で表す. P を擬順序集合とするとき, I が P の (擬順序) イデアルとは, $I \subset P$ であって, $x, y \in P$, $y \in I$, $x \leq y$ ならば $x \in I$ が成立することをいう.

(10.18.1) P の擬順序イデアルを開集合として, P には位相が入ることを示せ.

この位相空間 P を, $F(P)$ と書く.

(10.18.2) $f : P \to Q$ が擬順序を保つ写像で, $J \subset Q$ がイデアルならば, $f^{-1}(J)$ もイデアルであることを示せ.

かくして f は連続写像である. この f を $F(f)$ と書く. $F : \underline{\mathrm{POrd}} \to \underline{\mathrm{Top}}$ は関手である.

(10.18.3) F が忠実充満であることを示せ.

(10.18.4) F は同型稠密ではないことを示せ.

(10.18.5) 有限擬順序集合の圏 $\underline{\mathrm{FPOrd}}$ から, 有限位相空間の圏 $\underline{\mathrm{FTop}}$ への関手 F は同値であることを示せ. また, 準逆を具体的に記述せよ.

(10.18.6) 3 点からなる位相空間を同相により分類せよ.

11 圏の構成 (2)

(11.1) $S : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ と $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ は関手とする. その時, **コンマ圏 (comma category)** $(S \downarrow T)$ を, 対象は

$$\mathrm{Ob}((S \downarrow T)) = \{(d, e, f) \mid d \in \mathcal{A},\ e \in \mathcal{B},\ f \in \mathcal{C}(Sd, Te)\}$$

で定め,

$$(S \downarrow T)((d, e, f), (d', e', f')) = \{(k, h) \in \mathcal{A}(d, d') \times \mathcal{B}(e, e') \mid f' \circ Sk = Th \circ f\}$$

で射の集合を定める.

$$\begin{tikzcd} Sd \arrow[r, "Sk"] \arrow[d, "f"] & Sd' \arrow[d, "f'"] \\ Te \arrow[r, "Th"] & Te' \end{tikzcd}$$

合成は $(k', h') \circ (k, h) = (k'k, h'h)$ で定める.

(11.2) 特に $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$, $S = T = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ とした場合, コンマ圏 $(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ は $\mathcal{C}$ の射の圏 (8.11) に他ならない.

(11.3) S を定数関手 $c : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$ (ただし, $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$) にした場合が応用上重要である. コンマ圏 $(c \downarrow T)$ の対象は (b, f) という対で, $b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, $f : c \to Tb$ は射. 射 $(b, f) \to (b', f')$ は, 射 $h \in \mathcal{B}(b, b')$ で, 図式

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ Tb \arrow[rr, "Th"] & & Tb' \end{tikzcd}$$

が可換であるようなものである. 射の合成は $\mathcal{B}$ での射の合成になる.

(11.4) (11.3) で特に, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $T = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ とした圏 $(c \downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ は, $(c \downarrow \mathcal{C})$ とか, $c/\mathcal{C}$ などと表される.

$$\mathrm{Ob}(c/\mathcal{C}) = \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \mid s(f) = c\}$$

であり, $(c/\mathcal{C})(f, f') = \{h \in \mathcal{C}(t(f), t(f')) \mid hf = f'\}$ である. $c/\mathcal{C}$ の対象は c の下の $\mathcal{C}$ の対象と呼ばれる.

11.5 例. 一点 $*$ を考えると, $*/\underline{\mathrm{Top}}$ の対象とは, 位相空間 X と, 射 $* \to X$ の対である. そのような射を与えることは, X の一点を固定することと同じであるから, X とその点の対 (X, x) が $*/\underline{\mathrm{Top}}$ の対象である (基点つき位相空間という). 射 $f : (X, x) \to (Y, y)$ は, 単に連続写像 $f : X \to Y$ で, $f(x) = y$ であるものに他ならない.

11.6 例. 可換環 R について, $R/\underline{\mathrm{CRng}}$ は, 可換 R 代数の圏 $R\,\mathrm{CAlg}$ と同じである. しかし, $R/\underline{\mathrm{Rng}}$ は R 代数の圏 $R\,\mathrm{Alg}$ とは本質的に異なるので注意が必要である. S が非可換環の時には単に環準同型 $f : R \to S$ があるだけでは, S が R 代数とは断定できない ($f(R)$ が S の中心に入ることがさらに要請される).

(11.7) 双対的に, (11.1) において, $c \in \mathcal{C}$ を固定して, $\mathcal{B} = \mathbf{1}$, $T = c : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$ とし, $\mathcal{A} = \mathcal{C}$, $S = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ とした圏 $(\mathcal{C} \downarrow c) = \mathcal{C}/c$ を考えることもできる. $\mathcal{C}/c$ の対象は c の上の $\mathcal{C}$ の対象と呼ばれる.

11.8 例. スキーム S について, $\underline{\mathrm{Sch}}/S$ は S スキームの圏になる.

(11.9) $\mathcal{C}$ が圏のとき, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ の関係 R が $\mathcal{C}$ の**合同関係 (congruence)** であるとは,

(11.9.1) R は同値関係である.

(11.9.2) $f \mathrel{R} g$ ならば, $s(f) = s(g)$, $t(f) = t(g)$.

(11.9.3) $f \; R \; g$ で $(h, f, h') \in \mathcal{M}_3$ ならば, $hfh' \; R \; hgh'$ である.

が成立することをいう. このとき, $\mathcal{C}/R := (\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \mathrm{Mor}(\mathcal{C})/R, \bar{s}, \bar{t}, \bar{\circ})$ は圏になる. ただし, $\bar{s} : \mathrm{Mor}(\mathcal{C})/R \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は s から誘導される写像である. すなわち, $\pi : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C})/R$ を自然な射影とするとき, $\bar{s}\pi = s$. このような $\bar{s}$ は (11.9.2) から確かに存在する. 同様に, $\bar{t}$ は t から誘導される写像. $\bar{\circ} : \mathcal{M}_2(\mathcal{C}/R) \to \mathcal{C}/R$ も $\circ$ から誘導される写像. つまり, $\pi(f)\bar{\circ}\pi(g) = \pi(f \circ g)$. このような $\bar{\circ}$ が存在することは (11.9.3) から分かる.

関手 $Q_R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/R$ を, $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ については, $Q_R(c) = c$, $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ については, $Q_R(c) = \pi(c)$ と定めると, 関手になる.

圏 $\mathcal{C}/R$ を圏 $\mathcal{C}$ の合同関係 R による**商圏 (quotient category)** という. $\mathcal{C}$ が小さければ, $\mathcal{C}/R$ も小さい. $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏であれば, $\mathcal{C}/R$ も $\mathcal{U}$ 圏である.

11.10 補題. $\mathcal{C}$ が圏で, R は $\mathcal{C}$ の合同関係とする.

(11.10.1) $Q_R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/R$ は対象について全単射である. 特に同型稠密である.

(11.10.2) $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, $f \; R \; g$ であれば, $Q_R(f) = Q_R(g)$ である.

(11.10.3) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手で, $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, $f \; R \; g$ であれば, $F(f) = G(g)$ が成立するとき, 関手 $\bar{F} : \mathcal{C}/R \to \mathcal{D}$ であって, $F = \bar{F} \circ Q_R$ となるような $\bar{F}$ が一意的に存在する.

証明. Q_R は対象については恒等写像だから, 全単射である. だから同型稠密であることも明白である. $f \; R \; g$ であれば, $Q_R(f) = Q_R(g)$ であることも Q_R が射については $\pi : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C})/R$ であるから明白である.

(11.10.3) を示そう. 対象については Q_R が恒等写像だから, $\bar{F} : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}/R) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ は F と同じ, と定義せざるを得ない. 射については, $Q_R = \pi$ なので, $\bar{F} : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}/R) = \mathrm{Mor}(\mathcal{C})/R \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ は $\bar{F} \circ \pi = F$ で一意的に決まる写像とせざるを得ない. よって関手 $\bar{F}$ は一意的である. 存在をいうには, この定義で実際に関手になることをいえばよい. $\bar{f} = \pi(f) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}/R)$ について,

$$s\bar{F}(\bar{f}) = sF(f) = F(sf) = \bar{F}Q_R(\bar{s}\pi f) = \bar{F}(\bar{s}\bar{f}).$$

また,

$$t\bar{F}(\bar{f}) = tF(f) = F(tf) = \bar{F}Q_R(\bar{t}\pi f) = \bar{F}(\bar{t}\bar{f}).$$

また, $(\bar{f}, \bar{g}) = (\pi(f), \pi(g)) \in \mathcal{M}_2(\mathcal{C}/R)$ について, $s(f) = \bar{s}(\bar{f}) = \bar{t}(\bar{g}) = t(g)$ だから, $(f, g) \in \mathcal{M}_2(\mathcal{C})$ であり,

$$\bar{F}(\bar{f} \circ \bar{g}) = \bar{F}(Q_R(f) \circ Q_R(g)) = \bar{F}Q_R(f \circ g) = \\ F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) = \bar{F}(\bar{f}) \circ \bar{F}(\bar{g}).$$

また,

$$\bar{F}(1_c) = \bar{F}(Q_R(1_c)) = F(1_c) = 1_{Fc} = 1_{\bar{F}c}.$$

以上により $\bar{F}$ は確かに関手であり, $\bar{F}Q_R = F$ をみたしている. □

(11.11) 一般に $\mathcal{C}$ が圏で, R が $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ の関係で (11.9.2) をみたすもののとき,「R と同じかより弱いような合同関係がすべて成り立つ」という関係 R' は, R と同じかより弱いような合同関係であって, そのようなものの中で最強である. この R' を R で**生成された合同関係**という. $\mathcal{C}/R'$ を $\mathcal{C}/R$ と表してよい.

11.12 演習. X, Y が位相空間, f, g が X から Y への連続写像とする. f と g が**ホモトープ (homotope)** または**ホモトピック (homotopic)** であるとは, ある連続写像 $F : X \times I \to Y$ が存在して, $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ となることをいう. F は f を g につなぐ**ホモトピー (homotopy)** という. ここに, I は区間 $[0, 1]$ である. このとき $f \simeq g$ と表す. $\simeq$ は $\underline{\mathrm{Top}}$ の合同関係であることを示せ. $\underline{\mathrm{Top}}/\simeq$ を $\underline{\mathrm{Hot}}$ で表し, 位相空間の**ホモトピー圏 (homotopy category)** という.

11.13 例. G がアーベル群, X, Y が位相空間, $f \simeq g : X \to Y$ がホモトープな連続写像のとき, ホモロジー群に誘導される写像 $f_* : H_i(X, G) \to H_i(Y, G)$ と g_* は等しい. 補題 11.10 により, ホモロジー関手 $H_i(?, G) : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ は, $\underline{\mathrm{Hot}}$ を経由する. コホモロジー関手についても同様である. これには次のホモロジー代数の事実が関わっている. 詳しくは位相幾何学の教科書, 例えば [Hat] を参照.

11.14 例. R が可換環とするとき, $C(R)$ で小さい R 加群のなすチェイン複体全体がチェイン写像を射としてなす圏とする. $C, D \in C(R)$, $f, g \in C(R)(C, D)$ とする. R 準同型の族 $s = (s^i) \in \prod_i \mathrm{Hom}_R(C^i, D^{i-1})$ であって, 各 i について

$$f^i - g^i = \partial_D^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ \partial_C^i$$

が成立するものを f を g につなぐホモトピーという. このような s が存在するとき, f と g はホモトープ, またはホモトピックであるという. これを $f \simeq g$ で表す. $\simeq$ は合同関係である. $C(R)/\simeq$ を $K(R)$ で表し, R 加群のなすチェイン複体のホモトピー圏という. $f \simeq g$ ならば, $H^i(f) = H^i(g) : H^i(C) \to H^i(D)$ である. よってコホモロジー関手 $H^i : C(R) \to R\,\mathrm{Mod}$ は $K(R)$ を経由する.

11.15 演習. 例 11.14 の関係 $\simeq$ が合同関係であることを証明せよ.

12　極限と余極限

(12.1)　$\mathcal{C}$ が圏, $c \in \mathcal{C}$ とする. c が $\mathcal{C}$ の**始対象** **(initial object)** であるとは, 任意の $c' \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}(c, c')$ が一元集合であることをいう. $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の始対象を $\mathcal{C}$ の**終対象** **(final object)** という. すなわち, c が $\mathcal{C}$ の終対象であるとは, 任意の $c' \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}(c', c)$ が一元集合であることをいう. $c \in \mathcal{C}$ が始対象であり, かつ, 終対象でもあるとき, c は $\mathcal{C}$ の**零対象** **(null object)** であるという. $\mathcal{C}$ の射 $f : c \to c'$ が**零射** **(zero morphism)** であるとは, f が $c \to z \to c'$ と $\mathcal{C}$ のある零対象 z を経由することをいう. 始対象も終対象も, 存在すれば同型を除いて一意的である.

12.2 例. 空集合は小さい集合の圏 $\underline{\mathrm{Set}}$ の始対象である. 任意の一元集合は $\underline{\mathrm{Set}}$ の終対象である. $\mathbb{Z}$ は小さい環の圏 $\underline{\mathrm{Rng}}$ の始対象である. 零環 0 は小さい環の圏 $\underline{\mathrm{Rng}}$ の終対象である. 可換環 R に対して, 零加群 0 は $R\,\mathrm{Mod}$ の零対象である. 小さい無限集合全体のなす $\underline{\mathrm{Set}}$ の充満部分圏は始対象も終対象も持たない.

12.3 演習. 圏 $\mathcal{C}$ の対象 $c, c' \in \mathcal{C}$ に対して, c から c' への零射は一意的である. $\mathcal{C}$ が零対象を持てば c から c' への零射は存在する. $R\,\mathrm{Mod}$ の零射はどんなものか, 記述せよ.

(12.4)　$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とし, $c \in \mathcal{C}$ とする. コンマ圏 $(c \downarrow G)$ の始対象を c から G への**普遍射** **(universal arrow)** という. コンマ圏 $(c \downarrow G)$ の対象は $(0, d, f)$, $d \in \mathcal{D}$, $f : c \to Gd$ の形をしている. この元を $\langle d, f \rangle$ と表して良いことにする. $\langle d, f \rangle$ が c から G への普遍射であることは, $d \in \mathcal{D}$, $f : c \to Gd$ が $\mathcal{C}$ の射で, 任意の $d' \in \mathcal{D}$ と射 $f' : c \to Gd'$ に対して, ある $h : d \to d'$ が一意的に存在して, $f' = Gh \circ f$ となることに他ならない.

$$\begin{tikzcd}
 & Gd' & & d' \\
c \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & Gd \arrow[u, "Gh"'] & & d \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

12.5 補題. $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ が随伴のとき, $c \in \mathcal{C}$ に対して, $\langle Fc, \eta_c \rangle$ は c から G への普遍射である.

証明. 任意の $d \in \mathcal{D}$ と任意の $f : c \to Gd$ をとる. このとき, 図式

$$\begin{tikzcd}
 & Gd & & d \\
c \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\eta_c"] & GFc \arrow[u, "Gh"'] & & Fc \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

が可換となる $h : Fc \to d$ が一意的に存在することをいえば良いが, これは $\pi : \mathcal{D}(Fc, d) \to \mathcal{C}(c, Gd)$ が全単射であることと, π の記述 (9.4) から明白であろう. □

12.6 命題. $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が関手のとき, 次は同値である.

(12.6.1) G は左随伴を持つ.

(12.6.2) すべての $c \in \mathcal{C}$ に対して, c から G への普遍射が存在する.

証明. (12.6.1)⇒(12.6.2) は補題 12.5 から明白であろう.

(12.6.2)⇒(12.6.1) を示す. 選択公理により, $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ と $\eta : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ で, 各 $c \in \mathcal{C}$ について $\eta_c \in \mathcal{C}(c, GFc)$ であって, 任意の $d \in \mathcal{D}$ と $f \in \mathcal{C}(c, Gd)$ に対して, $h \in \mathcal{D}(Fc, d)$ であって, $f = Gh \circ \eta_c$ となるものが一意的に存在するようなものが存在する.

次に, $c, c' \in \mathcal{C}$ と $g \in \mathcal{C}(c, c')$ に対して, $Fg \in \mathcal{D}(Fc, Fc')$ を, 図式

(12.6.3)
$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "g"] & GFc \arrow[d, "GFg"] \\ c' \arrow[r, "\eta_{c'}"] & GFc' \end{tikzcd}$$

が可換になるように一意的に決めることが出来る. 一意性から容易に, $F1_c = 1_{Fc}$, $F(g' \circ g) = F(g') \circ F(g)$ が分かる. 以上により, F は関手になり, (12.6.3) の可換性は η が自然変換であることを示している.

$\pi_{c,d} : \mathcal{D}(Fc, d) \to \mathcal{C}(c, Gd)$ を $\pi_{c,d}(h) = Gh \circ \eta_c$ で定める. η_c の定義によって, $\pi_{c,d}$ は全単射である. $\pi_{c,d}$ が自然変換であることを示せば証明が終わる.

$u : c' \to c$ と $v : d \to d'$ について, 図式

(12.6.4)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(Fc, d) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathcal{D}(Fu, v)"] & \mathcal{C}(c, Gd) \arrow[d, "\mathcal{C}(u, Gv)"] \\ \mathcal{D}(Fc', d') \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{C}(c', Gd') \end{tikzcd}$$

を考える. $h \in \mathcal{D}(Fc, d)$ について, $(\mathcal{C}(u, Gv) \circ \pi)(h)$ は $Gv \circ Gh \circ \eta_c \circ u$ となる. 一方 $(\pi \circ \mathcal{D}(Fu, v))(h)$ は $Gv \circ Gh \circ GFu \circ \eta_{c'}$ である. η の自然性により, (12.6.4) は可換であり, π は自然同型と分かった. 以上により, (F, G, π) は随伴対である. 特に G は左随伴 F を持つ. □

12.7 例. $\underline{\mathrm{AMon}}$ で小さい可換モノイドの圏を表す. $G : \underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{AMon}}$ を埋入関手とする. $M \in \underline{\mathrm{AMon}}$ のとき, M から G への普遍射 $\varphi : M \to GA$ を構成しよう. 算法は乗法的に表すものとする. $M \times M$ に関係 $\sim$ を $(a, b) \sim (c, d)$ とは, ある $m \in M$ があって, $mad = mbc$ であることである, と定める. これが同値関係であることは容易である. $A = M \times M/\sim$ とおき, (a, b) の A における像を a/b と書く. $(a/b) \cdot (c/d) = ac/bd$ と定めることにより, 容易に A は $1/1$ を単位元に持つ, 可換群であることが分かる. また, A が小さいことは構成から明白である. $\varphi : M \to GA$ を $\varphi(m) = m/1$ で定義する. φ は M から G への普遍射である.

実際まず, $\varphi(mn) = mn/1 = (m/1)(n/1) = \varphi(m)\varphi(n)$, $\varphi(1) = 1/1$ であり, φ は $\underline{\mathrm{AMon}}$ の射になっている. また, $B \in \underline{\mathrm{Ab}}$, $\psi : M \to GB$ が $\underline{\mathrm{AMon}}$ の射とする. このとき, $\underline{\mathrm{Ab}}$ の射 $h : A \to B$ で $\psi = Gh \circ \varphi$ をみたすものは $h(a/a') = \psi(a)\psi(a')^{-1}$ で定まり, 一意的に存在する. よって $\varphi : M \to GA$ は M から G への普遍射である.

M は任意であったから, G の左随伴 $F : \underline{\mathrm{AMon}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ も存在する.

(12.8) 普遍射の双対概念も重要である. $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が関手で $c \in \mathcal{C}$ のとき, コンマ圏 $(F \downarrow c)$ の終対象を F から c への普遍射という. すなわち, $\langle b, f \rangle$ が F から c への普遍射であるとは, $b \in \mathcal{B}$ であって, $f : Fb \to c$ が $\mathcal{C}$ の射で, 任意の $b' \in \mathcal{B}$ と任意の射 $g : Fb' \to c$ に対して, ある $h : b' \to b$ が一意的に存在して, $f \circ Fh = g$ となることをいう.

$$
\begin{tikzcd}
b' \arrow[d, "h"] \\
b
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Fb' \arrow[d, "Fh"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Fb \arrow[r, "f"] & c
\end{tikzcd}
$$

これは $\langle b, f \rangle$ が c から F^{op} への普遍射であることと同値である.

(12.9) $I, \mathcal{C}$ を圏とする. $c \in \mathcal{C}$ に対して, $F_c(i) = c$, $F_c(\varphi) = 1_c$ $(i \in \mathrm{Ob}(I)$, $\varphi \in \mathrm{Mor}(I))$ で定まる関手 F_c を c で定まる**定数関手 (constant functor)** という. F_c のことを単に c で表す場合がある. I から $\mathcal{C}$ への関手 F が定数関手であるための必要十分条件は, F が $\mathbf{1}$ を経由することである. $c, c' \in \mathcal{C}$ に対して, I が空でない限り, $\mathrm{Nat}(c, c') = \mathcal{C}(c, c')$ と同一視される. ここに左辺の c, c' は定数関手の意味である.

I が空ならば, $\mathcal{C}^I$ は一元からなり, 定数関手 c は c によらない. このとき $\mathrm{Nat}(c, c')$ も一元からなる. この場合でも, $c \in \mathcal{C}$ は $\mathcal{C}^I$ の (unique な) 元を表していると見做すし, $h \in \mathcal{C}(c, c')$ は $\mathrm{Nat}(c, c')$ の (unique な) 元を表していると見做して良いことにする.

(12.10) I, $\mathcal{C}$ を圏とする．$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I = \mathrm{Func}(I, \mathcal{C})$ を $\Delta(c) = c$ (右辺の c は定数関手の意味である), $\Delta(\varphi) = \varphi$ で定める．ただし, I が空のときは, Δ は unique な関手 $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$ のことであると解釈する．Δ を**対角関手 (diagonal functor)** という．

関手 $F \in \mathcal{C}^I$ と $c \in \mathcal{C}$ に対して, F から定数関手 c への自然変換 $\varphi : F \to c$ は F から c への**錐 (cone)** と呼ばれる．**余錐 (cocone)** と呼ばれることもある．φ が F から c への錐であることは, $\langle c, \varphi\rangle$ がコンマ圏 $(F \downarrow \Delta)$ の対象であることと同じである．

例えば, $I = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 1 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[r, "\gamma"] & 2 \end{tikzcd}$ のとき, F から c への錐 $\varphi : F \to c$ を視覚化すると, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
F0 \arrow[r, shift left, "F\alpha"] \arrow[d, "\varphi 0"] & F1 \arrow[l, shift left, "F\beta"] \arrow[r, "F\gamma"] \arrow[d, "\varphi 1"] & F2 \arrow[d, "\varphi 2"] \\
c \arrow[r, equal] & c \arrow[r, equal] & c
\end{tikzcd}$$

になるが, 下の c を皆同一視して表すことにより,

$$\begin{tikzcd}
F0 \arrow[r, shift left, "F\alpha"] \arrow[dr, "\varphi 0"'] & F1 \arrow[l, shift left, "F\beta"] \arrow[r, "F\gamma"] \arrow[d, "\varphi 1"] & F2 \arrow[dl, "\varphi 2"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

と表され, 錐という表現が尤もであるということになる．

$F \in \mathcal{C}^I$ から Δ への普遍射 $\langle c_0, u\rangle$ を F の**余極限 (colimit)** という．これはコンマ圏 $(F \downarrow \Delta)$ の始対象のことだから, u は F から c_0 への錐になっている．対象 c_0 のことも F の余極限と呼び, $\varinjlim F$ で表す．u は F からの**極限錐 (limiting cone)** という．

言い直すと, $\langle c_0, u\rangle$ が F の余極限であるとは, $c_0 \in \mathcal{C}$, $u : F \to c_0$ は錐であって, 任意の $c \in \mathcal{C}$ と錐 $v : F \to c$ に対して, ある $h : c_0 \to c$ が一意的に存在して, $v = hu$ となることである．

始対象は同型を除いて一意的であるから, 余極限 $u : F \to c_0$ はコンマ圏 $(F \downarrow \Delta)$ において, 同型を除いて一意的である (存在するとは限らない)．特に $c_0 = \varinjlim F$ は $\mathcal{C}$ の対象として, 同型を除いて一意的に決まる．

任意の小さい I に対して, 任意の $F : I \to \mathcal{C}$ が余極限をもつとき, $\mathcal{C}$ は**小余完備 (small cocomplete)** という．任意の有限な I に対して 任意の $F : I \to \mathcal{C}$ が余極限をもつとき, $\mathcal{C}$ は有限な余極限を持つ, という．

(12.11) Λ が集合, $\mathcal{C}$ は圏とする．Λ を対象の集合とする疎な圏 (3.2) を再び Λ で表すことにする．関手 $F : \Lambda \to \mathcal{C}$ を与えることは, 実質, Λ で添字づ

けられた $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の部分集合族 $(F\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を与えることに他ならない．この場合の F の余極限 $\langle c_0, u\rangle$ を $\mathcal{C}$ の対象の族 $(F\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の**余積 (coproduct)** という．$c_0 = \varinjlim F$ を $\coprod_{\lambda\in\Lambda} F\lambda$ で表す．各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $u_\lambda : F\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} F\lambda$ が与えられていて, 任意の $c\in\mathcal{C}$ に対して,

$$\mathcal{C}(\coprod_\lambda F\lambda, c) \xrightarrow{U} \prod_\lambda \mathcal{C}(F\lambda, c)$$

が全単射である．ここに $U(\varphi) = (\varphi\circ u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ である．

任意の小さい集合 (resp. 有限集合) Λ に対して, Λ で添字づけられた $\mathcal{C}$ の対象の族が余積を持つとき, $\mathcal{C}$ は小さい余積を持つ (resp. 有限余積を持つ) という．

(12.12) $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏で Λ は小さいとする．容易に分かるように, $\mathcal{C}$ から $\underline{\mathrm{Set}}$ への関手 $c \mapsto \prod_\lambda \mathcal{C}(F\lambda, ?)$ が表現可能である必要十分条件は F の余積が存在することである．ここに, 共変関手 $G : \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が表現可能であるとは, ある $c\in\mathcal{C}$ が存在して, $G \cong \mathcal{C}(c, ?)$ となることである．

12.13 例. いくつかの具体的な圏では, 具体的に余積を構成する方法がよく知られている．$(F\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が集合族のとき, **離散和 (disjoint union)** $\coprod_{\lambda\in\Lambda} F\lambda$ を

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\{\lambda\}\times F\lambda)(\subset \Lambda\times\bigcup_\lambda F\lambda)$$

として定義する．Λ が小さく, 各 $F\lambda$ も小さいときに, これが F の余積を実際に与えることを確かめよ．

12.14 演習. 小さい位相空間の圏 $\underline{\mathrm{Top}}$ における小さい余積を与えよ．

12.15 例. R が小さい可換環, Λ が小さい集合, $(F\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $R\,\mathrm{Mod}$ の対象の族とするとき, 直和 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} F\lambda$ が $F : \Lambda \to R\,\mathrm{Mod}$ の余積である．

(12.16) I が空な圏のとき, 一意的に存在する関手 $F : I \to \mathcal{C}$ の余極限 $\langle r, u\rangle$ とは, r が $\mathcal{C}$ の始対象で, $u : F \to r$ は「空な錐」であるようなペアのこと, となる．結局, F の余極限を与えることと $\mathcal{C}$ の始対象を与えることは実質同じである．

(12.17) I が $1 \xleftarrow{\gamma} 0 \xrightarrow{\delta} 2$ の時に, $F : I \to \mathcal{C}$ の余極限を $\langle F\gamma, F\delta\rangle$ の**押し出し (push-out)** という．すなわち, $\langle c_0, u_1, u_2\rangle$ が $\mathcal{C}$ の図式 $b \xleftarrow{f} a \xrightarrow{g} b'$

の押し出し, または $\langle f, g\rangle$ の押し出しであるとは, 図式

(12.17.1)
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "u_1"] \\ b' \arrow[r, "u_2"] & c_0 \end{tikzcd}$$

が可換であって, 任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "v_1"] \\ b' \arrow[r, "v_2"] & c \end{tikzcd}$$

に対して, 図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "u_1"] \arrow[ddr, bend left, "v_1"] & \\ b' \arrow[r, "u_2"] \arrow[drr, bend right, "v_2"'] & c_0 \arrow[dr, "h"] & \\ & & c \end{tikzcd}$$

が可換となるような $h : c_0 \to c$ が一意的に存在することをいう. このとき, (12.17.1) は**押し出し図式 (push-out diagram)** と呼ばれる.

なお, a が $\mathcal{C}$ の始対象の場合には, 上の押し出しは $b \coprod b'$ になっている.

12.18 例. $\underline{\mathrm{Rng}}$ において $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$ の押し出しは, テンサー積 $B \otimes_A C$ に他ならない. $\underline{\mathrm{Grp}}$ において, $G_1 \xleftarrow{f} H \xrightarrow{g} G_2$ の押し出しは, **アマルガム積 (amalgamated product)** (又は**融合積**) $G_1 *_H G_2$ に他ならない.

(12.19) 圏 $\mathcal{C}$ の図式 $a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$ について, その**コイコライザ (coequalizer)** とは, I を小さい圏 $0 \overset{\gamma}{\underset{\delta}{\rightrightarrows}} 1$ だとして, $F : I \to \mathcal{C}$ を $F0 = a$, $F1 = b$, $F\gamma = f$, $F\delta = g$ で定めたときの F の余極限のことだと定義する. $\langle f, g\rangle$ のコイコライザともいう. つまり, $\langle c_0, u\rangle$ が $\langle f, g\rangle$ のコイコライザであるとは, $c_0 \in \mathcal{C}$ で $u = u_1 : b \to c_0$ が $\mathcal{C}$ の射で, $uf = ug$ であり, 任意の $\langle c, v\rangle$ で $c \in \mathcal{C}$, $v : b \to c$ で $vf = vg$ であるものに対して, ある $h : c_0 \to c$ が一意的に存在して $hu = v$ となることをいう.

特に, $g : a \to b$ が零射のとき, $\langle f, g\rangle$ のコイコライザを f の**余核** (**cokernel**) という.

射が 2 個でなくてもコイコライザの言葉は用いる. $a, b \in \mathcal{C}$ で, S が $\mathcal{C}(a, b)$ の部分集合のとき, $u : b \to c_0$ が S のコイコライザであるとは, 任意の $f, g \in S$ に対して $uf = ug$ であり, 射 $v : b \to c$ が任意の $f, g \in S$ に対して $vf = vg$ という性質をみたすならば, 射 $h : c_0 \to c$ であって $hu = v$ であるものが一意的に存在することをいう. これも一種の余極限で表せることは明らかだろう.

12.20 演習. $R\,\mathrm{Mod}$ の射 $f : M \to N$ に対して, $u : N \to N/\operatorname{Im} f$ を自然な射とするとき, u は f の上で定義した意味での余核である.

(12.21) **極限** (**limit**) は余極限の双対概念である.

$F : I \to \mathcal{C}$ が関手のとき, 自然変換 $u : c \to F$ を頂点 c から底 F への錐という. 錐の双対概念もまた, 同一概念ではないのに錐と呼ばれる (これを避けるために余錐という言葉が使える (12.10)).

普遍射の双対概念も普遍射と呼ばれる. 関手 $F : I \to \mathcal{C}$ と $c \in \mathcal{C}$ に対して, コンマ圏 $(F \downarrow c)$ の終対象を F から c への普遍射という. すなわち, $u : Fi \to c$ が F から c への普遍射であるとは, 任意の $v : Fj \to c$ に対して, ある $h : j \to i$ が一意的に存在して $v = u \circ Fh$ となることをいう.

$F : I \to \mathcal{C}$ が関手のとき, $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$ から $F \in \mathcal{C}^I$ への普遍射を F の極限という. 言い直すと, $\langle c_0, u\rangle$ が F の極限であるとは, $u : c_0 \to F$ が錐であり, 任意の錐 $v : c \to F$ に対して, ある $h : c \to c_0$ が一意的に存在して, $v = uh$ となることをいう. これは $u : c_0 = \Delta c_0 \to F$ がコンマ圏 $(\Delta \downarrow F)$ の終対象であることに他ならない.

任意の小さい I について任意の $F : I \to \mathcal{C}$ が極限を持つとき, $\mathcal{C}$ は**小完備** (**small complete**) であるという. 任意の有限な I について任意の $F : I \to \mathcal{C}$ が極限を持つとき, $\mathcal{C}$ は有限極限をもつという.

(12.22) 余積の双対を**積** (**product**) という. 多くの場合に積は**直積** (**direct product**) とも称される. 任意の小さい集合 (resp. 有限集合) Λ について, Λ で添字づけられた $\mathcal{C}$ の対象の族が積を持つとき, Λ は小さい積を持つ (resp. 有限積を持つ) という.

12.23 例. $\underline{\mathrm{Set}}$ では通常の集合の直積が積である. $\underline{\mathrm{Top}}$ では通常の直積に積位相を入れたものが積である. $\underline{\mathrm{Grp}}$ では群の直積が積である. $\underline{\mathrm{Rng}}$ では環の直積が積である. $\underline{\mathrm{Cat}}$ では圏の直積が積である.

(12.24) 空な圏からの一意的な関手の極限は終対象である.

(12.25) 押し出しの双対は**引き戻し (pull-back)** である. $\langle c_0, u_1, u_2\rangle$ が $\mathcal{C}$ の図式 $b \xrightarrow{f} a \xleftarrow{g} b'$ の引き戻しであるとは, 図式

(12.25.1)
$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & b \arrow[d, "f"] \\ b' \arrow[r, "g"] & a \end{tikzcd}$$

が可換図式であって, 任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "v_2"] & b \arrow[d, "f"] \\ b' \arrow[r, "g"] & a \end{tikzcd}$$

に対して, 図式

$$\begin{tikzcd} c \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "v_1"] \arrow[ddr, bend right, "v_2"'] & & \\ & c_0 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & b \arrow[d, "f"] \\ & b' \arrow[r, "g"] & a \end{tikzcd}$$

が可換になるような $h : c \to c_0$ が一意的に存在することをいう. このとき, (12.25.1) は**引戻し図式 (pull-back diagram)**, または**カルテジアン図式 (cartesian diagram)** という. なお, カルテジアン (cartesian, カーテジアン, またはカルテシアンともいう) とは, Descartes (デカルト) の形容詞形である.

これは $I = 1 \xrightarrow{\gamma} 0 \xleftarrow{\delta} 2$ で, $F : I \to \mathcal{C}$ が $F(0) = a$, $F(1) = b$, $F(2) = b'$, $F(\gamma) = f$, $F(\delta) = g$ で定まるときに, $u : c_0 \to F$ が極限錐であることに他ならない.

(12.26) コイコライザの双対は**イコライザ (equalizer)** である. $a, b \in \mathcal{C}$, $S \subset \mathcal{C}(a, b)$ とする. このとき, $u : c_0 \to a$ が S のイコライザであるとは, 任意の $f, g \in S$ に対して, $fu = gu$ であり, また $v : c \to a$ で任意の $f, g \in S$ に対して $fv = gv$ であるものに対して, $h : c \to c_0$ で $uh = v$ であるような射 h が一意的に存在することをいう.

$S = \{f, g\}$ で g が零射の場合が f の**核 (kernel)** である.

12.27 演習. R が小さい可換環,

(12.27.1)
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & M_1 \arrow[d, "v_1"] \\ M_2 \arrow[r, "v_2"] & N \end{tikzcd}$$

は $R\,\mathrm{Mod}$ の図式とする. 次が同値であることを示せ.

(12.27.2) 図式 (12.27.1) は押し出し図式である.

(12.27.3)
$$L \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{(v_1, v_2)} N \to 0$$

は完全列である.

特に, $R\,\mathrm{Mod}$ において押し出しは存在する.

(12.28) ドメイン及びコドメインを共有する射 $f, g : a \to b$ について, $\langle f, g\rangle$ は**平行対 (parallel pair)** という.

12.29 定理. $\mathcal{C}$ と I が圏で, $\mathcal{C}$ は任意の平行対のイコライザを持ち, また, $\mathrm{Ob}(I)$ および $\mathrm{Mor}(I)$ で添字づけられた積も持つとするとき, $\mathcal{C}$ は任意の関手 $F : I \to \mathcal{C}$ の極限を持つ.

証明. $f : \prod_{i\in\mathrm{Ob}(I)} Fi \to \prod_{u\in\mathrm{Mor}(I)} F(tu)$ を $p_u \circ f = q_{tu}$ で定める. ここに $p_u : \prod_u F(tu) \to F(tu)$ および $q_i : \prod_i Fi \to Fi$ は射影であり, t は射のコドメインを表す. また, $g : \prod_{i\in\mathrm{Ob}(I)} Fi \to \prod_{u\in\mathrm{Mor}(I)} F(tu)$ を $p_u \circ g = Fu \circ q_{su}$ で定める. ここに s は射のドメインを表す. $e : d \to \prod_i Fi$ を f と g のイコライザとする. $\mu_i = q_i \circ e : d \to Fi$ とおく. これにより $\mu : d \to F$ は錐である. 実際, $u : i \to j$ に対して,

$$Fu \circ \mu_i = Fu \circ q_i \circ e = p_u \circ g \circ e = p_u \circ f \circ e = q_j \circ e = \mu_j.$$

また, $\mu' : d' \to F$ も錐であるときに, $h : d' \to \prod_i Fi$ が $q_i \circ h = \mu'_i$ であるように定める. すべての $u : i \to j$ に対して,

$$p_u gh = (Fu)q_i h = (Fu)\mu'_i = \mu'_j = q_j h = p_u fh$$

なので, 積の普遍性から, $gh = fh$. よってイコライザの普遍性から, $h' : d' \to d$ が存在して, $eh' = h$ である. このとき,

$$\mu_i \circ h' = q_i \circ e \circ h' = q_i \circ h = \mu'_i.$$

逆に $h' : d' \to d$ で $\mu_i \circ h' = \mu'_i$ となる射について, $h = eh'$ によって h を定義すれば, $i \in I$ について, $q_i h = q_i eh' = \mu_i h' = \mu'_i$ だから, h は積の普遍性によって一意的に定まってしまい, イコライザの普遍性により, h' も一意的である. 以上により, $\mu : d \to F$ は極限錐である. これが示すべき事であった. □

12.30 系. $\mathcal{C}$ が小さい積を持って任意の平行対のイコライザを持つならば, $\mathcal{C}$ は小完備である.

12.31 例. $\underline{\mathrm{Set}}$ は小さい直積で閉じており, 直積が積になるので, 小さい積を持つ. 一方, $f, g : X \to Y$ が $\underline{\mathrm{Set}}$ の射のとき, $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ と埋入 $E \hookrightarrow X$ の対は f と g のイコライザである. よって $\underline{\mathrm{Set}}$ は小完備である. 実際, $F : I \to \underline{\mathrm{Set}}$ を小さい圏 I からの関手とすると,

$$\varprojlim F = \{(x_i) \in \prod_{i \in \mathrm{Ob}(I)} Fi \mid \forall (f : i \to j) \in \mathrm{Mor}(I)\ (Ff)(x_i) = x_j\}$$

とおき, $\sigma_i : \varprojlim F \to Fi$ を $\sigma_i((x_i)) = x_i$ とおけば, $\sigma : \varprojlim F \to F$ が極限になっていることも容易に確かめられる. $\underline{\mathrm{Top}}$ においても, 直積に直積位相を入れて, 積になった. 集合としてのイコライザ E に X の部分空間としての位相 (相対位相) を入れれば, $E \hookrightarrow X$ は $\underline{\mathrm{Top}}$ におけるイコライザになる. よって $\underline{\mathrm{Top}}$ も小完備である. この場合も直接的に極限を構成することは容易な演習問題である.

12.32 系. $\mathcal{C}$ が終対象を持ち, 任意の 2 個の対象の積を持ち, 任意の平行対のイコライザを持つならば, $\mathcal{C}$ は有限極限をもつ.

証明. $(X \times Y) \times Z = X \times Y \times Z$ のように, 3 個以上の対象の積は, 2 個の対象の積を取ることを繰り返して得られる. このことと定理から明白である. □

(12.33) 関手 $V : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手 $F : I \to \mathcal{C}$ の極限を**創出** **(create)** するとは, 任意の $\mathcal{D}$ における極限錐 $\tau : x \to VF$ に対して, $V\sigma = \tau$ となる錐 $\sigma : a \to F$ が一意的に存在し, かつ σ が極限錐であることを言う. S が $\mathcal{C}$ をコドメインに持つ関手の集合, あるいはクラスのとき, V が S の極限を創出するとは, 任意の $F \in S$ に対して, V が F の極限を創出することをいう. 例えば, V が積を創出する, と言えば, I が疎な場合に V が F の極限を創出することをいう. 単に V が極限を創出する, とは, 任意の I と任意の F について, V が F の極限を創出することをいう. 双対的に, 余極限の創出も同様にして定義される.

12.34 例. 忘却関手 $U : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は極限を創出しない. 実際, X が 2 元からなる集合 $2 = \{0, 1\}$ に密着位相を入れたものとし, $F : \mathbf{1} \to \underline{\mathrm{Top}}$ を定数関手 $F0 = X$ とする. $\tau : 2 \to UF$ を $\tau_0 = 1_2$ で定めると, τ は極限錐だが, $U\sigma = \tau$ となる錐 $\sigma : Y \to F$ は一意的ではない. 実際, Y は 2 に密着位相を入れたものにも, 離散位相を入れたものにも取れる.

12.35 演習. 忘却関手 $U : \underline{\mathrm{Grp}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は極限を創出する. 特に $\underline{\mathrm{Grp}}$ は小完備である.

(12.36) 通常極限は関手として扱われる. $\mathcal{C}$ が圏, P が圏, $p \in P$ とするとき, $E_p : \mathcal{C}^P \to \mathcal{C}$ を $E_p(H) = Hp$, $E_p\sigma = \sigma_p$ によって定める.

12.37 補題. I, P, $\mathcal{C}$ は圏, $S : I \to \mathcal{C}^P$ は関手とし, 各 $p \in P$ に対して, E_pS は極限錐 $\tau_p : L_p \to E_pS$ を持つとする. このとき, 一意的な関手 $L : P \to \mathcal{C}$ が対象の上では $Lp = L_p$ であり, $\tau : L \to S$ が錐であるように定まる. このとき τ は極限錐である.

証明. $h : p \to q$ が P の射であるとき, 自然変換 $E_h : E_p \to E_q$ が $E_h(H) = Hh : Hp \to Hq$ で定まる. 合成

$$L_p \xrightarrow{\tau_p} E_pS \xrightarrow{E_hS} E_qS$$

は錐なので, 極限錐 $\tau_q : L_q \to E_qS$ の普遍性により,

(12.37.1)
$$\begin{tikzcd} L_p \arrow[r, "\tau_p"] \arrow[d, "Lh"] & E_pS \arrow[d, "E_hS"] \\ L_q \arrow[r, "\tau_q"] & E_qS \end{tikzcd}$$

が可換となる $Lh : L_p \to L_q$ が一意的に存在する. この図式 (12.37.1) の可換性が, τ が錐であることと同値である. 一意性から容易に $L : P \to \mathcal{C}$ は関手となる.

最後に, $\tau' : L' \to S$ も錐とする. 各 p ごとに, ある $f_p : L'_p \to L_p$ が一意的に存在して, $\tau'_p = \tau_p f_p$ である. f が自然変換なら良い. $h : p \to q$ に対して,

$$\tau_q L_h f_p = E_hS\tau_p f_p = E_hS\tau'_p = \tau'_q L'_h = \tau_q f_q L'_h.$$

$\tau_q : L_q \to E_qS$ は極限錐だったから, 一意性によって $L_h f_p = f_q L'_h$. これは f が自然変換であることを示す. □

(12.38) もっとも普通なのは, $P = \mathcal{C}^I$ とおいて, $S : I \to \mathcal{C}^P$ を $(Si)(F) = Fi$, $(Si)(\sigma) = \sigma_i$, $(Sh)(F) = Fh$ で定めたときである. 明らかに, 各 $F \in \mathcal{C}^P$ に対して, $E_F S = F$ である. だから, 補題 12.37 は, 各 F ごとに極限錐 $\tau_F : L_F \to F$ が与えられたときに, L を関手 $\mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ に, $\tau : L \to S$ を極限錐にできる, という訳である. このようなわけで, 実際の数学でも, 極限は関手 $L : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ である, という暗黙の了解で話が進むことが多い. 各 L_F が F ごとに具体的に構成された極限か, 単に存在するだけで, 選択公理などの操作で選ばれてきただけのものなのかは, 文脈で決まる. 自然な同型 $\rho : \mathcal{C}(c, LF) \to \mathcal{C}^I(\Delta c, F)$ $(\rho(h)_i = \tau_i \circ h)$ が存在するので, L は対角関手の右随伴である. 逆に対角関手の右随伴 L が関手的な極限を与えることは容易である.

(12.39) S が $\mathcal{C}$ をコドメインに持つ関手の集合またはクラスとする. 関手 $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が S の極限を**保存 (preserve)** するとは, 任意の $F \in S$ と任意の極限錐 $\tau : c \to F$ に対して, $H\tau : Hc \to HF$ が極限錐であることをいう. すべての小さい極限を保存するとき, H は**連続 (continuous)** であるという. ただし, 連続関手という言葉は, 全く違う意味で用いられる場合もある.

$F : I \to \mathcal{C}$ が関手で F と HF が共に極限をもち, $\tau : c \to F$ と $\sigma : d \to HF$ が極限錐とすると, $H\tau : Hc \to HF$ は錐なので, σ の普遍性から, $h : Hc \to d$ で, $\sigma_i \circ h = H\tau_i$ となる射が一意的に誘導される. わかりやすく書くと, $h : H \varprojlim F \to \varprojlim HF$ である. これが同型射になることが, H が F の極限を保つことの必要十分条件となる.

12.40 定理. $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏, $c \in \mathcal{C}$ のとき, $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Set}}$ はすべての極限を保存する.

証明. $F : I \to \mathcal{C}$ は関手, $\tau : d \to F$ は極限錐とする. $\mathcal{C}(c, \tau) : \mathcal{C}(c, d) \to \mathcal{C}(c, F-)$ が極限錐ならば良い. そこで $\sigma : X \to \mathcal{C}(c, F-)$ を錐とせよ. 各 $x \in X$ に対して, $\sigma_i x \in \mathcal{C}(c, Fi) : c \to Fi$ は錐 $\mu(x) : c \to F$ を与える. $\mu(x)_i = \sigma_i x$ である. 極限錐の普遍性により, ある $kx : c \to d$ が一意的に存在して, $\tau_i(kx) = \mu(x)_i = \sigma_i x$ である. これによって $k : X \to \mathcal{C}(c, d)$ が存在して,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ \mathcal{C}(c,d) \arrow[r, "\mathcal{C}(c,\tau_i)"] & \mathcal{C}(c,Fi) \end{tikzcd}$$

は可換である. 逆に k がこの図式の可換性により一意的に定まることは明白だろう. 以上により, $\mathcal{C}(c, \tau) : \mathcal{C}(c, d) \to \mathcal{C}(c, F-)$ は極限錐である. つまり, $\mathcal{C}(c, -)$ は任意の極限を保つ. □

12.41 補題. $F : I \to \mathcal{C}$ が関手, $V : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は F の極限を創出する関手とし, VF は極限を持つとする. このとき, F は極限を持ち, V は F の極限を保つ.

証明. $\tau : d \to VF$ を極限錐とする. 極限の創出の定義により, ある $\sigma : c \to F$ なる錐であって, $V\sigma = \tau$ となるようなものが一意的に存在し, σ は極限錐である. 特に, F は極限をもつ.

V が F の極限を保つことを示そう. 極限錐は錐の同型を除いて一意的であり, 極限錐と同型ならば極限錐である. よってある F の極限錐が V によって極限錐に写れば良い. これは $V\sigma = \tau$ によって明白である. □

(12.42) 随伴関手の利用価値の高い性質として, 右随伴関手は極限を保つ. 左随伴関手は余極限を保つ.

12.43 定理. 右随伴関手は極限を保つ. すなわち, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が左随伴関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を持てば, G は任意の極限を保つ.

証明. $T : I \to \mathcal{D}$ を関手, $\tau : d \to T$ を極限錐とする. $\sigma : c \to GT$ を任意の錐とする. 随伴により, 錐 $\pi^{-1}\sigma : Fc \to T$ が得られる. τ の普遍性により, ある $h : Fc \to d$ が一意的に存在して, $\pi^{-1}\sigma = \tau h$ である. このような h を与えることは, $\pi h : c \to Gd$ を与えることと同じで, $\pi^{-1}\sigma = \tau h$ は $\sigma = \pi(\tau h) = (G\tau)(Gh)\eta = (G\tau)(\pi h)$ と同じ. よって, $\sigma = (G\tau)h'$ をみたす $h' : c \to Gd$ が一意的に存在し, $G\tau$ は極限錐とわかった. つまり G は T の極限を保つ.

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[rr, "\pi^{-1}\sigma"] \arrow[dr, "h"'] & & T \\ & d \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi h"'] & & GT \\ & Gd \arrow[ur, "G\tau"'] & \end{tikzcd}$$

□

12.44 系. 左随伴関手は余極限を保つ.

12.45 演習. R が可換環,

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

が R 加群の完全列, T が R 加群とする. このとき,

$$L \otimes_R T \xrightarrow{f\otimes 1} M \otimes_R T \xrightarrow{g\otimes 1} N \otimes_R T \to 0$$

も完全列である.

13　Freyd の随伴関手定理

(13.1)　この定理を議論する前に, 技術的な問題を解決しておく. これは, [McL] で, $G : A \to X$ が関手で, $x \in X$ で, A が $\mathcal{U}$ 圏のとき, $(x \downarrow G)$ も $\mathcal{U}$ 圏である, と述べている [McL, (V.6), Theorem 2 の証明] 点で, 実質正しい主張であるにもかかわらず, 正しくない. この問題は圏の定義, コンマ圏の定義に遡る.

[McL] の, そして我々の圏の定義では, $\mathcal{C}$ が圏で $c, c', d, d' \in \mathcal{C}$ の時, $(c, c') = (d, d')$ でない限り, $\mathcal{C}(c, c') \cap \mathcal{C}(d, d') = \emptyset$ である (排反性公理). これは $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ の元がそのドメインとコドメインの情報を保持しているから我々としては当然である. すると, $1 : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ は常に単射であり, 特に $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ は $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 以上の濃度を持つ. $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏ならば, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{U}$ なので, 次が成立する.

13.2 補題. $\mathcal{C}$ が圏で, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の濃度が $\mathcal{U}$ のそれを真に上回るとき, $\mathcal{C}$ は $\mathcal{U}$ 圏ではない.

13.3 例. $\mathcal{C}$ は $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{c\}$, $\mathcal{C}(c, c) = \Lambda$ であるようなモノイド (単対象圏) とする. $\#\Lambda > \#\mathcal{U}$ と仮定する. $F : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$ は定数関手 c とする. すると, $\mathbf{1}$ は小さいので $\mathcal{U}$ 圏だが, コンマ圏 $(c \downarrow F)$ は対象の集合が Λ と同じ濃度を持つので $\mathcal{U}$ 圏ではない. 更に, $(c \downarrow F)$ は離散圏なので特に骨格的であり, 同値な圏で置き換えても対象の数は増えることはあっても減りはしない. つまり, $(c \downarrow F)$ は $\mathcal{U}$ 圏と同値にすらならない.

排反性公理がここに来て重荷になっている. しかし, 今さら圏の定義を変更すると, これまでの議論全部に見直しが必要になり, 収拾がつかない恐れもあるので, 次の定義をして保守的に進むことにする.

13.4 定義. $\mathcal{C}$ が**擬 $\mathcal{U}$ 圏**であるとは, 任意の $c, c' \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}(c, c')$ が小さい集合と対等 (つまり bijective) であることをいう.

次は明白だろう.

13.5 補題. $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が関手で, $\mathcal{D}$ は擬 $\mathcal{U}$ 圏, $c \in \mathcal{C}$ とする. このとき, コンマ圏 $(c \downarrow G)$ は擬 $\mathcal{U}$ 圏である.

$\mathcal{U}$ 圏を擬 $\mathcal{U}$ 圏で置き換えて議論し, 問題の箇所を切り抜けようというわけである.

(13.6) $\mathcal{U}$ 圏は擬 $\mathcal{U}$ 圏である. 擬 $\mathcal{U}$ 圏と同値な圏は擬 $\mathcal{U}$ 圏である. 特に $\mathcal{U}$ 圏と同値ならば擬 $\mathcal{U}$ 圏である.

13.7 演習. 圏 $\mathcal{C}$ について次は同値である.

(13.7.1) $\mathcal{C}$ は $\mathcal{U}$ 圏と同値である.

(13.7.2) $\mathcal{C}$ は擬 $\mathcal{U}$ 圏であり, $\mathcal{C}$ の対象の同型類の全体 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})/\cong$ の濃度は $\mathcal{U}$ の濃度と同じか, それ以下である.

13.8 演習. I が小さい圏, $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏のとき, $\mathcal{C}^I = \mathrm{Func}(I, \mathcal{C})$ は $\mathcal{U}$ 圏と同値であることを示せ.

(13.9) 随伴関手の存在は, 対象ごとの普遍射の存在に帰着された (命題 12.6). 普遍射は一種の始対象だった. そこで, 始対象の存在定理が, 随伴関手の存在定理を呼ぶことが分かる.

13.10 定理. $\mathcal{C}$ が小完備な擬 $\mathcal{U}$ 圏とするとき, 次は同値である.

(13.10.1) $\mathcal{C}$ は始対象を持つ.

(13.10.2) (**解集合条件 (solution set condition)**) ある小さい集合 I と, 写像 $k : I \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して, 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して, ある $i \in I$ が存在して, $\mathcal{C}(k(i), c) \neq \emptyset$.

証明. (13.10.1)⇒(13.10.2). e を $\mathcal{C}$ の始対象とすると, $I = 1 = \{0\}$, $k(0) = e$ で良い (この向きの証明には $\mathcal{C}$ が小完備な擬 $\mathcal{U}$ 圏である事は使わない).

(13.10.2)⇒(13.10.1). $\mathcal{C}$ が小完備なので, $w = \prod_{i \in I} k(i)$ とおけば, 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して, $\varphi \in \mathcal{C}(k(i), c)$ を取れ,

$$w = \prod_i k(i) \xrightarrow{p_i} k(i) \xrightarrow{\varphi} c$$

の合成があるので, 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}(w, c) \neq \emptyset$ であるような $w \in \mathcal{C}$ が取れた.

$\mathcal{C}$ は擬 $\mathcal{U}$ 圏なので, $\mathcal{C}(w, w)$ は小さい集合と対等である. $\mathcal{C}$ は小完備なので, $\mathcal{C}(w, w)$ のイコライザ $e : v \to w$ を取ることができる ($\mathcal{C}(w, w)$ が小さい集合と**対等**なだけで, イコライザが小極限になることを確認せよ). v が $\mathcal{C}$ の始対象であることを示せば十分である. w の取り方により, 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(v, c) \neq \emptyset$ は明白なので, $f, g \in \mathcal{C}(v, c)$ だとして, $f = g$ を証明すれば良い.

f, g のイコライザを $e_1 : u \to v$ とする．$\mathcal{C}(w,u) \neq \emptyset$ なので，$s \in \mathcal{C}(w,u)$ が取れる．このとき，e の取り方により，

$$ee_1se = 1_we = e = e1_v.$$

e はイコライザだから単射であり，$e_1se = 1_v$．$fe_1 = ge_1$ の両辺に右から se をかけて，$f = g$. □

13.11 補題. $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が関手で，$c \in \mathcal{C}$, $T : I \to (c \downarrow G)$ はコンマ圏への関手とする．射影

$$(c \downarrow G) \to \mathcal{D} \qquad ((c \xrightarrow{s} Ga) \mapsto a)$$

を Q で表す (コンマ圏からの射影と呼ぶ)．G は QT の極限を保つとする．このとき，Q は T の極限を創出する．

証明. $\tau : d \to QT$ を極限錐とする．$h : c \to Gd$ で，$\sigma : \langle d, h \rangle \to T$ が錐で，$Q\sigma = \tau$ となる条件を考える．仮定により，$G\tau : Gd \to GQT$ も極限錐である．よって，$Ti = \langle QTi, \varphi_i \rangle$, ただし $\varphi_i : c \to GQTi$ とすると，$\varphi : c \to GQT$ は錐なので，極限錐の普遍性によって，$h : c \to Gd$ で，$\varphi = G\tau \circ h$ となるものは一意的に存在する．この可換性が上記のような σ が存在するための条件で，σ が一意的なのは明らかである．よって，Q が T の極限を創出することをいうには，σ が極限錐ならば良い．

そこで，$\sigma' : \langle d', h' \rangle \to T$ を錐とする．すると $Q\sigma' : d' \to QT$ は錐なので，τ の普遍性により，ある $f : d' \to d$ が一意的に存在して，$Q\sigma' = \tau \circ f$ である．ところで，

$$G\tau \circ Gf \circ h' = GQ\sigma' \circ h' = \varphi = G\tau \circ h.$$

$G\tau$ が極限錐で h は一意的だったから，$Gf \circ h' = h$ である．これは $f : \langle d', h' \rangle \to \langle d, h \rangle$ が射であることを示している．また，$Q\sigma' = \tau \circ f = Q\sigma \circ Qf$ で Q は忠実なので，$\sigma' = \sigma \circ f$．逆に $\sigma' = \sigma \circ f$ をみたす $f : \langle d', h' \rangle \to \langle d, h \rangle$ は，Q を両辺に作用させれば明らかなように，$Q\sigma' = \tau \circ f$ をみたさねばならないので一意的である．以上により，$f : \langle d', h' \rangle \to \langle d, h \rangle$ で $\sigma' = \sigma \circ f$ をみたす f が一意的に存在する．つまり，σ は極限錐である．これが示すべき事であった. □

13.12 系. $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が関手で，$c \in \mathcal{C}$, $Q : (c \downarrow G) \to \mathcal{D}$ は射影とする．G が極限 (resp. 小極限, 積, 引き戻し) を保てば，Q は極限 (resp. 小極限, 積, 引き戻し) を創出する. □

13.13 系. $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が関手で，c, Q は補題の通りとする．$\mathcal{D}$ が小極限 (resp. 小さな積, 引き戻し) を持ち，G が小極限 (resp. 小さな積, 引き戻し) を保て

ば, 任意の $c \in \mathcal{C}$ について, コンマ圏 $(c \downarrow G)$ は小極限 (resp. 小さな積, 引き戻し) を持ち, 射影 $Q : (c \downarrow G) \to \mathcal{D}$ は小極限 (resp. 小さな積, 引き戻し) を保つ.

証明. 系 13.12 と補題 12.41 により明白である. □

13.14 定理 (Freyd の随伴関手定理). 小完備な擬 $\mathcal{U}$ 圏 $\mathcal{D}$ と関手 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が与えられたとき, G が左随伴関手を持つための必要十分条件は, G が連続で, 次の条件をみたすことである.

解集合条件: 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して, ある小さな集合 I で添字づけられた $\mathcal{C}$ の射の族 $f_i : c \to Gd_i$ が存在して, すべての射 $h : c \to Gd$ は, ある $t : d_i \to d$ によって, $h = Gt \circ f_i$ と表せる.

証明. ここでの解集合条件は, コンマ圏 $(c \downarrow G)$ に関する定理 13.10 の意味での解集合条件に他ならないことに注意する.

必要性を示す. G が左随伴を持てば, 任意の極限を保つ (定理 12.43). 特に連続 (すなわち, 小極限を保つ) である. また, 命題 12.6 によって, 各 $c \in \mathcal{C}$ について, c から G への普遍射が存在する. つまり, コンマ圏 $(c \downarrow G)$ の始対象が存在する. 定理 13.10 の証明で注意したように, コンマ圏 $(c \downarrow G)$ において, 解集合条件が満される.

十分性を示す. 命題 12.6 によって, 各 $c \in \mathcal{C}$ に対して $(c \downarrow G)$ が始対象を持てば良い. $(c \downarrow G)$ は解集合条件をみたしているので, 定理 13.10 によって, $(c \downarrow G)$ が小完備な擬 $\mathcal{U}$ 圏ならば良い. G が連続で $\mathcal{D}$ が小完備と仮定しているから, 系 13.13 により, $(c \downarrow G)$ も小完備である. また, 補題 13.5 によって, $(c \downarrow G)$ は擬 $\mathcal{U}$ 圏である. □

(13.15) $\mathcal{D}$ が $\mathcal{U}$ 圏, $K : \mathcal{D} \to \underline{\mathrm{Set}}$ を関手とする. $r \in \mathcal{D}$ と自然同型 $\psi : \mathcal{D}(r, -) \to K$ の組 $\langle r, \psi \rangle$ を K の**表現 (representation)** という. K の表現が存在することが K が表現可能であることに他ならない.

13.16 補題. $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は関手, $\mathcal{D}$ も $\mathcal{C}$ も $\mathcal{U}$ 圏とする. $c \in \mathcal{C}$ とする. 米田の同型 $\Phi : \mathrm{Nat}(\mathcal{D}(d, -), \mathcal{C}(c, G-)) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$ $(\Phi(\psi) = \psi_d(1_d))$ (米田の補題, 補題 8.32 参照) は, 自然同型と普遍射の対応を引き起こす. Φ の逆写像 $\Psi : \mathcal{C}(c, Gd) \to \mathrm{Nat}(\mathcal{D}(d, -), \mathcal{C}(c, G-))$ は $\Psi(h)(f) = Gf \circ h$ で与えられる.

証明. 実際, Ψ が well-defined で, $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ であることは容易であるから, Ψ は Φ の逆写像である. h が普遍射であることと $\Psi(h)$ が自然同型であることの同値性は, 普遍射の定義から明白だろう. □

13.17 系. $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は関手, $\mathcal{D}$ も $\mathcal{C}$ も $\mathcal{U}$ 圏とする. $c \in \mathcal{C}$ とする. 関手 $\mathcal{C}(c, G-) : \mathcal{D} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が表現可能である必要十分条件は, c から G への普遍射が存在することである.

13.18 系. $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は関手, $\mathcal{D}$ も $\mathcal{C}$ も $\mathcal{U}$ 圏とする. G が左随伴を持つ必要十分条件は, すべての $c \in \mathcal{C}$ について, $\mathcal{C}(c, G-)$ が表現可能であることである.

13.19 補題. $h : \mathrm{Id}_{\underline{\mathrm{Set}}} \to \underline{\mathrm{Set}}(1, -)$ を $h(X) : X \to \underline{\mathrm{Set}}(1, X)$ を $h(X)(x)(0) = x$ と定めることにより定めると自然同型である.

証明. 容易である.

13.20 補題. $\mathcal{D}$ は $\mathcal{U}$ 圏, $K : \mathcal{D} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は関手とする. K が表現可能である必要十分条件は, 普遍射 $1 \to K$ が存在することである.

証明. $K \cong \underline{\mathrm{Set}}(1, K-)$ が補題 13.19 から従う. ところで $\underline{\mathrm{Set}}(1, K-)$ が表現可能である必要十分条件は, 系 13.17 によって, 普遍射 $1 \to K$ が存在することである. これから補題が従う. □

普遍射 $1 \to K$ はコンマ圏 $(1 \downarrow K)$ の始対象だった. ところで, コンマ圏 $(1 \downarrow K)$ の対象は $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ と $\underline{\mathrm{Set}}$ の射 $h : 1 \to K(d)$ の組である. h は $K(d)$ の元で定まるから, コンマ圏 $(1 \downarrow K)$ の対象とは対 $\langle d, x \rangle$ で, $x \in K(d)$ であるもの, となる.

13.21 定理 (表現可能性定理). $\mathcal{D}$ を小完備な $\mathcal{U}$ 圏とする. 関手 $K : \mathcal{D} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が表現可能であるための必要十分条件は, K が連続で, 以下の条件をみたすことである.

解集合条件: 小さな集合 I と, 写像 $k : I \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ が存在して, 任意の $d \in \mathcal{D}$ と $x \in K(d)$ に対して, ある $i \in I$ とある $y \in K(ki)$ と射 $f : ki \to d$ が存在して, $(Kf)(y) = x$.

証明. まず, ここで述べた解集合条件は, コンマ圏 $(1 \downarrow K)$ の始対象に関する解集合条件に他ならない. 実際, J が小さい集合で, $m : J \to \mathrm{Ob}(1 \downarrow K)$ が写像で, これが解集合条件をみたすと, $I = J$ とし,

$$J \xrightarrow{m} \mathrm{Ob}(1 \downarrow K) \xrightarrow{Q} \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$$

の合成を k として, ここでの解集合条件が成立する. 逆に, ここでの解集合条件が成立すれば, $J := \coprod_{i \in I} K(ki)$ とおいて, J は小さく, $m : J \to \mathrm{Ob}(1 \downarrow K)$ を $m(i, x) = \langle ki, x \rangle$ で定めれば, 始対象に関する解集合条件をみたす.

必要性を示す. 定理 12.40 によって, K が表現可能ならば連続である. また, K が表現可能ならば, $(1 \downarrow K)$ は始対象を持つので, 始対象に関する解集合条件をみたす.

十分性を示す. K が連続で $\mathcal{D}$ が小完備なので, 系 13.13 によって, $(1 \downarrow K)$ も小完備である. また, $\mathcal{D}$ が $\mathcal{U}$ 圏なので, $(1 \downarrow K)$ は擬 $\mathcal{U}$ 圏である. 定理 13.10 によって, $(1 \downarrow K)$ は始対象を持つ. すなわち, K は表現可能である. □

(13.22) 集合 A が**推移的 (transitive)** であるとは, $x \in A$, $y \in x$ ならば $y \in A$ が成立することを言う. 言い換えると, $x \in A$ ならば $x \subset A$ である. 別の言い方をすると, $\bigcup_{x \in A} x \subset A$ である. 宇宙は推移的である. 推移的集合の共通部分, 和集合は推移的である. A の任意の元が推移的集合であるとき, **遺伝推移的 (hereditarily transitive)** という. このとき, A の任意の元が遺伝推移的である. 遺伝推移的集合の共通部分, 和集合は遺伝推移的である.

(13.23) 遺伝推移的集合は $x \leq y$ とは $x \in y$ または $x = y$ のこととして順序集合である. $z \leq y$, $y \leq x$ ならば $z \leq x$ は x が推移的だから容易. また, $x \leq y$, $y \leq x$ ならば $x \subset y$, $y \subset x$ で $x = y$. $x \leq x$ は明白である. この順序集合は降鎖条件をみたす. つまり, $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$ なる無限列は存在しない. これは正則性の公理 (の一つの形) そのものである.

13.24 補題. 遺伝推移的集合 A について,

(13.24.1) A は整列集合である.

(13.24.2) x が遺伝推移的集合で $x \subsetneq A$ ならば $x \in A$.

証明. $B = A \cup \{A\}$ とおく. B も遺伝推移的であり, A は B の最大元である.

$$P = \{A' \in B \mid A' \text{ は (13.24.1), (13.24.2) の性質をみたす}\}$$

とおいて, $P = B$ を言えば良い. そうでないとして, $B \setminus P$ には極小元 C がある.

C の比較不能な 2 元 x, y があったとして, 仮定により, x, y には包含関係もない. $x \cap y \subsetneq x$, $x \cap y \subsetneq y$. すると $x \cap y \in x$ かつ $x \cap y \in y$. よって $x \cap y \in x \cap y$. これは正則性の公理に反する. つまり C は整列集合. $x \subsetneq C$ が遺伝推移的, というのは, x が C の真の順序イデアルであることである. よって, $C \setminus x$ の最小元を y とすると, $x = (-\infty, y)$ であるが, C の順序は $\leq$ つまり, $\in$ または $=$ で与えられているので, $(-\infty, y) = y$ であり, $x = y \in C$. つまり, C は (13.24.1), (13.24.2) の性質両方をみたす. これは C のとり方に反して矛盾である. □

任意の整列順序集合 X に対して, ある一意的な遺伝推移的集合 Y があって, X と Y は順序同型である. その意味で, 遺伝推移的集合を順序数とも呼ぶ (原始的には順序数とは整列集合の順序型の事である).

(13.25) 小さい順序数全体 O はまた順序数であり, 従って順序集合だから圏である. $O \notin O$ だから, O 自身は小さくない. O^{op} は $\mathcal{U}$ 圏であり, O は小さい部分集合の最小上界を持つから, O^{op} は小完備である. O^{op} から $\underline{\mathrm{Set}}$ への定数関手 1 は明らかに連続である. しかるに 1 が表現可能で $1 \cong O(-, x)$ とすると, x は O の最大元でなければならないが, $x \in O$ なので, 明らかに $x \cup \{x\} \in O$ であり, x は最大ではなく矛盾である. つまり, 解集合条件を省くと定理 13.21 は反例がある. 実際, 解集合条件は, O が共終な小さい部分集合を持っている, という条件になるが, 成り立っていない.

(13.26) R が可換環, A, B, C が $R\,\mathrm{Mod}$ の対象とする. $f : A \times B \to C$ が R 双線型であるとは, 任意の $a \in A$ について, $f(a, -) : B \to C$ が R 線型で, かつ, 任意の $b \in B$ について $f(-, b) : A \to C$ が R 線型であることをいう. 次は容易である.

(13.26.1) $f : A \times B \to C$ が R 双線型で, $g : C \to C'$ が R 線型ならば, gf は R 双線型である.

これにより, $\mathrm{BL}(A, B; C) = \{f \in \mathrm{Map}(A \times B, C) \mid f$ は双線型$\}$ と定めて, 関手 $\mathrm{BL}(A, B; -) : R\,\mathrm{Mod} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が定まる. $\mathrm{BL}(A, B; g)(f) = gf$ である.

次に, 群の場合と同様, 忘却関手 $U : R\,\mathrm{Mod} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は極限を創出する. I が小さい圏, $F : I \to R\,\mathrm{Mod}$ が関手とする. このとき, 全単射 $\underline{\mathrm{Set}}(A \times B, \varprojlim F) \to \varprojlim \underline{\mathrm{Set}}(A \times B, F-)$ は全単射 $\mathrm{BL}(A, B, \varprojlim F) \to \varprojlim \mathrm{BL}(A, B, F)$ を引き起こす. つまり, $h : A \times B \to \varprojlim F$ が双線型である必要十分条件は, 各 $\tau_i \circ h$ が双線型なことである. ここに $\tau : \varprojlim F \to F$ は極限錐である. 実際, $a \in A$ について, $h(a, -)$ が線型であることと, 各 $\tau_i h(a, -)$ が線型であることは, U が極限を創出したのだから同値で, 同様に $b \in B$ について, $h(-, b)$ が線型であることと, 各 $\tau_i h(-, b)$ が線型であることも同値である. よって $\mathrm{BL}(A, B; -)$ は連続である.

また, $R\,\mathrm{Mod}$ は $\mathcal{U}$ 圏である. U が極限を創出したので, $\underline{\mathrm{Set}}$ が小完備なことから, $R\,\mathrm{Mod}$ も小完備である.

よって解集合条件を確認すれば, $\mathrm{BL}(A, B; -)$ は表現可能となる. C が R 加群, $f \in \mathrm{BL}(A, B; C)$ のとき, f は $f(A \times B)$ で生成された C の部分加群を経由する. そこで, $A \times B$ で生成された自由加群 F の商加群 F/N, $N \subset F$ の全体を考えれば, 小さい解集合になっている. つまり $\mathrm{BL}(A, B; C)$ は表現可能である. $\mathrm{BL}(A, B; C)$ の表現とは, $T \in R\,\mathrm{Mod}$ と $\xi \in \mathrm{BL}(A, B; T)$ の組

だった. このとき, T を $A \otimes_R B$ と表し, $\xi : A \times B \to A \otimes_R B$ による像 $\xi(a,b)$ を $a \otimes b$ と表すことにより, テンソル積が構成された.

(13.27) $U : \underline{\mathrm{Grp}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は極限を創出した. よって $\underline{\mathrm{Grp}}$ は小完備で, U は連続である. また, $\underline{\mathrm{Grp}}$ が $\mathcal{U}$ 圏であることは明白である. よって, U の左随伴関手の存在をいうには, 各 $X \in \underline{\mathrm{Set}}$ に対して, U の解集合を見つければ良い.

任意の写像 $f : X \to G$ ($G \in \underline{\mathrm{Grp}}$) は, G の, $f(X)$ で生成された部分群 $\langle f(X) \rangle$ を経由する. $Y = X \coprod X$ とおく. 左の X の元 x はそのまま書き, 右の X の元 x は x' と書くこととして区別することにする. $f' : Y \to \langle f(X) \rangle$ を $f'(x) = f(x)$, $f'(x') = f(x)^{-1}$ によって定義する. $Z = \coprod_{i \geq 0} Y^n$ とおく. $f'' : Z \to \langle f(X) \rangle$ を, $f''(0, *) = e$, $f''(n, (y_1, \ldots, y_n)) = f'(y_1) \cdots f'(y_n)$ で定める. $f''(Z)$ が $f(X)$ を含む G の部分群であり, 従って $f''(Z) = \langle f(X) \rangle$ であることは容易である. 従って, $\#\langle f(X) \rangle \leq \#Z$ である. 濃度 $\#Z$ 以下の群の同型類は, Z が小さいから小さい集合で添字づけられる.

よって解集合条件もみたされ, 忘却関手 $U : \underline{\mathrm{Grp}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は左随伴関手 $F : \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{\mathrm{Grp}}$ を持つ. $X \in \underline{\mathrm{Set}}$ に対して, FX を, X で生成された自由群といい, 通常 $\eta : X \to UFX = FX$ による x の像をそのまま x で表す. ηX も X で表し, $X \subset FX$ と見るのである.

13.28 演習. 上の構成から出発して, FX は X で生成されることを証明せよ. よく知られた自由群の構成を出発点としてはならない (自明になってしまうから).

13.29 演習. $\mathcal{C}$ を圏, I を圏, $F, G : I \to \mathcal{C}$ を関手, $\sigma : F \to G$ を自然変換とし, 各 $i \in I$ について σ_i は単射だとする. F と G が極限を持つとき, 誘導される射 $\varprojlim \sigma : \varprojlim F \to \varprojlim G$ は単射であることを示せ.

13.30 演習. $f, g : c \to c'$ が圏 $\mathcal{C}$ における平行対, $e : d \to c$ はそのイコライザとする. このとき, e は単射である.

13.31 演習. $\mathcal{C}$ が圏,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, "f"] & d \end{tikzcd}$$

は $\mathcal{C}$ における引き戻し図式とする. f が単射ならば f' は単射であることを示せ (従って, g が単射ならば, g' は単射になる).

14 特殊随伴関手定理

(14.1) 特殊随伴関手定理は The Special Adjoint Functor Theorem (SAFT) のここでの訳である．本講義の用語は [三高] を参考にしてはいるが, [三高] の訳「特別な随伴関手定理」は用いないことにした．**special** orthogornal group $\Rightarrow$ **特殊**直交群, **special** function $\Rightarrow$ **特殊**関数, **special** value $\Rightarrow$ **特殊**値等の訳語を参考にして訳している．まずは, 部分対象, 商対象, 生成系, 余生成系について準備をする．

(14.2) $\mathcal{C}$ を圏, $c \in \mathcal{C}$ とする．集合

$$M(c) := \{u \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \mid t(u) = c \text{ で}, u \text{ は単射}\}$$

に擬順序 $\leq$ を $(u : a \to c) \leq (v : b \to c)$ とは, u が v を経由すること (つまりある $h : a \to b$ が (一意的に) 存在して $u = vh$), のことであると定めることによって定める．$u \equiv v$ とは, $u \leq v$ かつ $u \geq v$ のことと定める．$\equiv$ は同値関係である．

14.3 演習. $u \equiv v$ はある同型 $h : a \to b$ が (一意的に) 存在して $u = vh$ であることと同値である．

$M(c)/\equiv$ の元を c の**部分対象 (subobject)** と呼ぶ．以後 $M(c)/\equiv$ を $\bar{M}(c)$ と書くことにする．部分対象の全体 $\bar{M}(c)$ は $\leq$ を引き継いで, 順序集合になる．$u, v \in M(c)$ で, それぞれの $\bar{M}(c)$ における像を $\bar{u}$, $\bar{v}$ と表す．$\bar{u} \leq \bar{v}$ とは, $u \leq v$ のことである．

(14.4) 圏 $\underline{\mathrm{Set}}$ において, $X \in \underline{\mathrm{Set}}$ について, $\mathrm{Im} : M(X) \to \mathcal{P}(X)$ を $\mathrm{Im}(u : S \to X) = f(S)$ で普通に定めると, $u \equiv v$ が $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(v)$ と同値であることがわかる．つまり, 誘導される写像 $\bar{I} : \bar{M}(X) \to \mathcal{P}(X)$ は全単射であり, X の部分対象と, X の部分集合は, f の類に $\mathrm{Im}\, f$ を対応させることで同一視される．

同様にして, $\underline{\mathrm{Grp}}$ においては, $G \in \underline{\mathrm{Grp}}$ の部分対象と G の部分群は同一視される．$\underline{\mathrm{Rng}}$ においては, $R \in \underline{\mathrm{Rng}}$ の部分対象と R の部分環は同一視される．$\underline{R\,\mathrm{Mod}}$ においては, 部分対象と R 部分加群とが同一視される．

しかしながら, $\underline{\mathrm{Top}}$ においては, (写像としての) 像が同じだが, 同値ではない単射が存在するので, 部分対象と部分空間は同一概念ではない．

(14.5) 圏 $\mathcal{C}$ が **well-powered** とは, 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して, c の部分対象の集合 $\bar{M}(c)$ が小さい集合と対等であることをいう．$\underline{\mathrm{Set}}$, $\underline{\mathrm{Grp}}$, $\underline{\mathrm{Rng}}$, $\underline{R\,\mathrm{Mod}}$ は上に見たように明らかに well-powered である．$\underline{\mathrm{Top}}$ においては, X の部分

対象は, X の部分集合 Y に, 相対位相より強い位相を考え合わせたもののことであるから, $\underline{\mathrm{Top}}$ も well-powered である.

(14.6) $\mathcal{C}$ の対象 c について, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における c の部分対象を ($\mathcal{C}$ における) c の**商対象 (quotient object)** という. $\mathcal{C}$ の商対象 $\bar{u}, \bar{v}$ について, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で考えて $\bar{u} \le \bar{v}$ であることを, $\mathcal{C}$ の商対象としても $\bar{u} \le \bar{v}$ と表す. また, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ が well-powered であることを, $\mathcal{C}$ が **co-well-powered** であるという.

14.7 例. $\underline{\mathrm{Set}}$ の全射は上への写像のことだった. $\underline{\mathrm{Set}}$ において, (上への) 写像 $f : X \to S$ に対して, X の同値関係 $\equiv_f$ を $x \equiv_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ で定めて対応させる. これによって, X の商対象と X の同値関係は $1:1$ に対応する. X の商対象として小さいことと X の同値関係として弱いことは同値である.

14.8 例. $\underline{\mathrm{Grp}}$ の全射とは, 実は上への写像であるような群準同型のことである. 証明の概略を述べる. もし反例があれば, H が $G \in \underline{\mathrm{Grp}}$ の部分群, $H \ne G$ だが, 埋入 $i : H \hookrightarrow G$ が全射であるものがあるはずである. $u_1, u_2 : G \to G *_H G$ を, アマルガム積 $G *_H G$ への普遍射とする. 一般に u_1 と u_2 は単射で, $u_1(G) \cap u_2(G) = u_1(H) = u_2(H)$ であることがよく知られている. つまり, $u_1 \ne u_2$ である. ところが $u_1 i = u_2 i$ だから, これは i の全射性に反して矛盾.

よって, $\underline{\mathrm{Grp}}$ における G の商対象は, その核で分類され, 従って G の正規部分群で分類される. 商対象が大きいほど, 対応する正規部分群は小さくなる.

(14.9) $\mathcal{C}$ が圏, $c \in \mathcal{C}$ とし, Λ が集合, $u_\lambda : a_\lambda \to c$ は単射の族とする. $u \in M(c)$ について, $\bar{u}$ が $\{\bar{u}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \bar{M}(c)$ の最大下界のとき, u または $\bar{u}$ を (u_λ) 又は $(\bar{u}_\lambda)$ の**交わり (intersection, meet)** ということがある. 最小上界の方は, **和 (union, sum)** と呼ばれる.

もし $u : a \to c$ が (u_λ) の引き戻し (つまり圏 $\mathcal{C}/c$ の対象の族と見ての積. ある種の $\mathcal{C}$ への関手の極限にもなっている) とすると, 容易にわかるように u も単射であり, u は (u_λ) の交わりを与える.

(14.10) 最小上界の存在の十分条件を述べるために, 像の概念を導入する. $f : a \to b$ が圏 $\mathcal{C}$ の射とする. $\langle g, i \rangle$ が f の像であるとは, $(i, g) \in \mathcal{M}_2$, $ig = f$, i は単射であり, $(i', g') \in \mathcal{M}_2$, $i'g' = f$ であれば, $i \le i'$ であることを言う.

14.11 演習. 余積 $\bigoplus_\lambda a_\lambda$ から c への (u_λ) によって誘導される射 h について, h が像 $\langle g, i \rangle$ を持てば, i は (u_λ) の和である.

(14.12) 圏 $\mathcal{C}$ の対象からなる集合 S が $\mathcal{C}$ を**生成する** (**generate**) とは, 任意の $\mathcal{C}$ の平行対 $h, h' : a \to b$ について, ある $s \in S$ とある $f : s \to a$ が存在して, $hf \neq h'f$ となることをいう. S が $\mathcal{C}$ の**生成系** (**generator, set of generators**) である, ともいう. $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏で, I が小さい集合, $\varphi : I \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は写像, $S = \varphi(I)$ のとき, S が $\mathcal{C}$ を生成するための必要十分条件は, 関手 $\prod_{s\in S} \mathcal{C}(\varphi s, -) : \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が忠実なことである.

$\mathcal{C}$ の対象 q について, $\{q\}$ が生成系のとき, q を**生成子** (**generator**) という.

S が $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を生成するとき, S は $\mathcal{C}$ を**余生成する** (**cogenerate**) という. $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の生成系, 生成子はそれぞれ**余生成系** (**cogenerator, set of cogenerators**), **余生成子** (**cogenerator**) と呼ぶ.

14.13 例. $\mathrm{Id}_{\underline{\mathrm{Set}}} \cong \underline{\mathrm{Set}}(1, -) : \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は忠実である. よって 1 は $\underline{\mathrm{Set}}$ の生成子である. $f, g : X \to Y$ が $\underline{\mathrm{Set}}$ の平行対で, $f(x) \neq g(x)$ とすると, $h : Y \to 2$ を, $h(f(x)) = 0$, $h(g(x)) = 1$ となるように取れる. つまり, 2 は $\underline{\mathrm{Set}}$ の余生成子である.

14.14 演習. $(F, G) : \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ が随伴対, G は忠実, $\mathcal{D}$ は生成系 S を持つとする. このとき, $F(S)$ は $\mathcal{C}$ の生成系である.

14.15 例. 例 14.13 と演習 14.14 により, 可換環 R に対して, 自由加群 R は R の生成子である. 一点集合 1 は $\underline{\mathrm{Top}}$ の生成子である. $\mathbb{Z}$ は $\underline{\mathrm{Grp}}$ の生成子である. 有限アーベル群全体のなす $\underline{\mathrm{Ab}}$ の充満部分圏について,

$$\{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mid q \text{ は素数ベキ}\}$$

は生成系である. しかしこの圏は生成子は持たない.

14.16 補題. $\mathcal{C}$ が圏, S が $\mathcal{C}$ の生成系とする. 余積 $c = \coprod_{s\in S} s$ が存在するならば, c は $\mathcal{C}$ の生成子である.

証明. 主張は $\mathcal{U}$ に無関係なので, $\mathcal{U}$ を大きく取り直して, $\mathcal{C}$ は小さいとして良い. このとき, $\mathcal{C}(c, -) \cong \prod_{s\in S} \mathcal{C}(s, -)$ は忠実なので, c は生成子である. □

14.17 補題. $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が関手, $c \in \mathcal{C}$ とし, S は $\mathcal{D}$ の余生成系とする. このとき,

$$S' = \{\langle f, s\rangle \in \mathrm{Ob}(c \downarrow G) \mid s \in S\}$$

は $(c \downarrow G)$ の余生成系である. 特に, $\mathcal{C}$ が擬 $\mathcal{U}$ 圏で, S が小さい集合と対等ならば, $(c \downarrow G)$ も小さい集合と対等な余生成系を持つ.

証明. $h, h' : \langle f, d\rangle \to \langle f', d'\rangle$ を $(c \downarrow G)$ の平行対で, $h \neq h'$ とする. $\mathcal{D}$ の射として $h \neq h'$ なので, ある $s \in S$ とある $g : d' \to s$ が存在して, $gh \neq gh'$ である. g は $\langle f', d'\rangle$ から, $\langle Gg \circ f', s\rangle \in S'$ への射だと思え, $(c \downarrow G)$ の射としても $gh \neq gh'$ なので, S' は $(c \downarrow G)$ を余生成する. S' は $\coprod_{s \in S} \mathcal{C}(c, Gs)$ と同一視できるので, $\mathcal{C}$ が擬 $\mathcal{U}$ 圏で, S が小さい集合と対等ならば, S' は小さい集合と対等である. □

いよいよ SAFT について述べる. まずは始対象についての定理である.

14.18 定理 (特殊始対象定理 (the special initial-object theorem)). $\mathcal{C}$ が小完備な擬 $\mathcal{U}$ 圏で, 小さい集合と対等な余生成系 Q を持つとする. このとき, 各 $c \in \mathcal{C}$ について, 任意の $\bar{M}(c)$ の部分集合が交わりを持つとすると, $\mathcal{C}$ は始対象を持つ.

証明. $q_0 = \prod_{q \in Q} q$ とおくと, 補題 14.16 により, q_0 は余生成子である. q_0 のすべての部分対象の交わりを r とおく. r が $\mathcal{C}$ の始対象であることを示せば十分である. $f, g : r \to d$ が平行対で $f \neq g$ ならば, イコライザ $e : r_0 \to r$ は同型ではない単射であり, $\bar{M}(q_0)$ で $r_0 < r$. これは r のとり方に反する. よって, $d \in \mathcal{C}$ に体して, $\mathcal{C}(r, d)$ は高々一元からなる. よって, $\mathcal{C}(r, d)$ が空でないことを示せばよい.

射 $j : d \to \prod_{h \in \mathcal{C}(d, q_0)} q_0$ を $p_h j = h$ で定める. ここに $p_h : \prod_{h \in \mathcal{C}(d, q_0)} q_0 \to q_0$ は h に対応した成分への射影である. $\Delta : q_0 \to \prod_{h \in \mathcal{C}(d, q_0)} q_0$ を対角線とする. つまり, $p_h \Delta = 1_{q_0}$ である. これらの引き戻しをとって, 引き戻し図式

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & q_0 \arrow[d, "\Delta"] \\ d \arrow[r, "j"] & \prod_{h \in \mathcal{C}(d, q_0)} q_0 \end{tikzcd}$$

を得る. j が単射なので, 演習 13.31 により j' も単射. r のとり方により, 射 $r \to c$ があり, $r \to c \to d$ と合成すれば, r から d への射が得られた. □

14.19 補題. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が関手で, $\mathcal{D}$ が引き戻しを持ち, F は引き戻しを創出するとする. このとき, $\mathcal{C}$ の射 $h : c \to c'$ が単射である必要十分条件は, $Fh : Fc \to Fc'$ が単射であることである.

証明. h が単射であることと,

$$\sigma = \begin{tikzcd} c \arrow[r, "1_c"] \arrow[d, "1_c"] & c \arrow[d, "h"] \\ c \arrow[r, "h"] & c' \end{tikzcd}$$

が引き戻し図式であることは同値である．同様に, Fh が単射であることと,

$$F\sigma = \begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "1_{Fc}"] \arrow[d, "1_{Fc}"'] & Fc \arrow[d, "Fh"] \\ Fc \arrow[r, "Fh"] & Fc' \end{tikzcd}$$

が引き戻し図式であることは同値である．$\mathcal{D}$ が引き戻しを持って, F が引き戻しを創出するので, F は引き戻しを保つ．よって σ が引き戻し図式ならば, $F\sigma$ は引き戻し図式であり, h が単射ならば, Fh は単射．逆に $F\sigma$ が引き戻し図式ならば, 引き戻しが創出されるので, σ は引き戻し図式でなければならず, Fh が単射ならば, h は単射.

14.20 系. $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が関手で, $c \in \mathcal{C}$, $Q : (c \downarrow G) \to \mathcal{D}$ は射影とする．$\mathcal{D}$ が引き戻しを持ち, G が引き戻しを保てば, $(c \downarrow G)$ の射 h について, h が単射である必要十分条件は, $Q(h)$ が単射であることである． □

14.21 定理 (特殊随伴関手定理). $\mathcal{D}$ は小完備な擬 $\mathcal{U}$ 圏とし, 小さな集合と対等な余生成系を持つとする．また, $\mathcal{D}$ の各対象 d に対して, d の部分対象からなる任意の集合について, その引き戻しが存在するとする (それは無論交わりにもなっている)．また, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は関手で, $\mathcal{C}$ も擬 $\mathcal{U}$ 圏とする．このとき, G が左随伴関手を持つ必要十分条件は, G が連続で, すべてのコドメインが共通の単射の族に関する交わりを保つことである.

証明. G が左随伴を持てば, 任意の極限を保たなければならないので, 特に G は連続で, すべてのコドメインが共通の単射の族に関する交わりを保つ.

十分性を示す．それには, 任意の $c \in \mathcal{C}$ に関して, コンマ圏 $(c \downarrow G)$ が始対象を持てば良く, 特殊始対象定理の条件をチェックすれば良い．$\mathcal{C}$ が擬 $\mathcal{U}$ 圏で, $\mathcal{D}$ は小さい集合と対等な余生成系を持つので, 補題 14.17 によって, $(c \downarrow G)$ は小さい集合と対等な余生成系を持つ．$\mathcal{D}$ が擬 $\mathcal{U}$ 圏なので, 補題 13.5 によって $(c \downarrow G)$ も擬 $\mathcal{U}$ 圏である．$\mathcal{D}$ が小完備で G が連続なので, 系 13.13 によって $(c \downarrow G)$ も小完備である．また, A を $\langle f, d \rangle \in \mathrm{Ob}(c \downarrow G)$ の部分対象の集合とする．すると QA は系 14.20 により, $d \in \mathcal{D}$ の部分対象の集合とみなせる．よって, QA は引き戻しを持つ．G がすべてのコドメインが共通の単射の族に関する交わりを保つ事から, Q は A の引き戻しを創出する (補題 13.11)．よって, A は引き戻しを持ち, 特に交わりを持つ．定理 14.18 によって, $(c \downarrow G)$ は始対象を持つ．これが示すべき事であった． □

$\mathcal{D}$ が小完備かつ well-powered とする．$d \in \mathcal{D}$ の部分対象からなる任意の集合は well-powered なので小さい集合と対等である．よってこれは小完備な

ので引き戻しを持つ．また, このような引き戻しは, 小極限だから, 連続関手によって保たれる．これから, 次の系を直ちに得る．

14.22 系. $\mathcal{D}$ は小完備で well-powered な擬 $\mathcal{U}$ 圏とし, 小さな集合と対等な余生成系を持つとする．また, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は関手で, $\mathcal{C}$ も擬 $\mathcal{U}$ 圏とする．このとき, G が左随伴関手を持つ必要十分条件は, G が連続であることである．

関手 $K : \mathcal{D} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が表現可能であることは $(1 \downarrow K)$ が始対象を持つことだった．特殊始対象定理を用いた全く同様の議論で次がわかる．

14.23 定理. $\mathcal{D}$ は小完備で well-powered な擬 $\mathcal{U}$ 圏とし, 小さな集合と対等な余生成系を持つとする．$K : \mathcal{D} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が関手のとき, K が表現可能である必要十分条件は, K が連続であることである．

14.24 例. R が可換環とすると, $(R\,\mathrm{Mod})^{\mathrm{op}}$ は小完備で, well-powered な擬 $\mathcal{U}$ 圏で, 余生成子 R を持つ．よって, 連続な関手 $K : R\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は表現可能である．また, $R\,\mathrm{Mod}$ も小完備で, well-powered な擬 $\mathcal{U}$ 圏であり, $R\,\mathrm{Mod}$ も余生成子を持つことが知られている．よって, 連続な共変関手 $K : R\,\mathrm{Mod} \to \underline{\mathrm{Set}}$ も表現可能である．

15　加法圏, アーベル圏, R 圏

(15.1)　R は可換環とする．$\mathcal{A}$ が R **圏** (**R-category**) であるとは, 各 $a, a' \in \mathcal{A}$ に対して, 集合 $\mathcal{A}(a', a)$ には R 加群の構造が与えられており, $(a, a', a'') \in \mathcal{M}_3$ に対して, 合成 $\circ : \mathcal{A}(a', a) \times \mathcal{A}(a'', a') \to \mathcal{A}(a'', a)$ が R 双線型であることをいう．R 圏の双対圏は R 圏である．

(15.2)　$\mathcal{A}$ が R 圏で, $a, b \in \mathcal{A}$ ならば, $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}\, a := \mathcal{A}(a, a)$ は射の合成を積として R 代数になり, $\mathcal{A}(b, a)$, $\mathcal{A}(a, b)$ はそれぞれ射の合成を作用として左, 右の $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}\, a$ 加群となる．R 代数として $\mathrm{End}_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}\, a \cong (\mathrm{End}_{\mathcal{A}}\, a)^{\mathrm{op}}$ であることは明白だろう．

(15.3)　$\mathcal{A}$ が $\mathcal{U}$ 圏で R 圏ならば, $\mathcal{A}(a, ?)$ は $\mathcal{A}$ から $R\,\mathrm{Mod}$ への関手だと思える．これを改めて $\mathcal{A}[a, ?]$ と書こう．すると, $U \circ \mathcal{A}[a, ?] = \mathcal{A}(a, ?)$ ということになる．ここに $U : R\,\mathrm{Mod} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は忘却関手．同様に, $\mathcal{A}[?, a] : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to R\,\mathrm{Mod}$ も定義され, $U \circ \mathcal{A}[?, a] = \mathcal{A}(?, a)$.

(15.4)　$\mathbb{Z}$ 圏を**前加法圏** (**preadditive category**) とも呼ぶ．任意の R について, R 圏は $\mathbb{Z}$ 圏とみなせる．

$\mathbb{Z}$ 圏 $\mathcal{A}$ の図式

(15.4.1) $$a \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} c \underset{q}{\overset{j}{\leftrightarrows}} b$$

が (a と b に対する) **双積図式 (biproduct diagram)** であるとは, $pi = 1_a$, $qj = 1_b$, $ip + jq = 1_c$ が成立することをいう. このとき, c は a と b の**双積 (biproduct)** であるともいう. $\mathcal{A}$ の双積図式は, $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ においても双積図式をなすことに注意する. このとき, $pj = 0$, $qi = 0$ である. 実際,

$$pj = p(ip + jq)j = pipj + pjqj = pj + pj$$

なので $pj = 0$. $qi = 0$ も同様である.

(15.5) もう少し一般に, $n = 0, 1, 2, \ldots$ について,

(15.5.1) $$a_l \xrightarrow{i_l} a, \quad a \xrightarrow{p_l} a_l \quad (l = 1, \ldots, n)$$

が ($a_1, \ldots, a_n$ に対する) 双積図式であるとは, 各 l, k について $p_l i_k = \delta_{l,k}$ (ここに $\delta_{l,k}$ は Kronecker の δ である. つまり, $l = k$ のとき $p_l i_l = 1_{a_l}$, $l \neq k$ のとき $p_l i_k = 0$) であって, $\sum_{l=1}^n i_l p_l = 1_a$ が成立することをいう. このとき, a は $a_1, \ldots, a_n$ の双積であるという. 前のパラグラフでの定義は丁度 $n = 2$ の場合に相当する. $n = 2$ を強調するために 2 項双積と呼ぶ場合もある.

$n = 0$ の場合は, 単に $\mathcal{A}$ の対象 a が与えられていて, a から a への射として, $0 = 1_a$ が成立していることを意味する.

(15.6) 圏 $\mathcal{C}$ と $c \in \mathcal{C}$ について, $e \in \mathcal{C}(c, c)$ が**射影子 (projector)** であるとは, $e^2 = e$ をみたすことをいう. e がモノイド $\mathcal{C}(c, c)$ の**ベキ等元 (idempotent)** であると言っても同じである.

(15.5.1) が双積図式のとき, $e_l = i_l p_l$ とおくと, $e_l e_k = i_l (p_l i_k) p_k = \delta_{l,k} e_l$, $e_1 + \cdots + e_n = 1_a$ である. 特に e_l は射影子である.

15.7 補題. $n \geq 0$ とする. $\mathbb{Z}$ 圏 $\mathcal{A}$ の図式 (15.5.1) について, 次は同値である.

(15.7.1) (15.5.1) は双積図式である.

(15.7.2) $i_l : a_l \to a$ は $a_1, \ldots, a_n$ の余積であって, 各 l について $p_l : a \to a_l$ は各 k について $p_l i_k = \delta_{l,k}$ で一意的に定まる射である.

(15.7.3) $p_l : a \to a_l$ は $a_1, \ldots, a_n$ の積であって, 各 k について, $i_k : a_k \to a$ は各 l について $p_l i_k = \delta_{l,k}$ で一意的に定まる射である.

証明. (15.7.1)⇒(15.7.2). $p_l i_k = \delta_{l,k}$ $(l, k = 1, \ldots, n)$ は仮定されている. $i_l : a_l \to a$ が余積になることを示す. $\varphi_l : a_l \to d$ が与えられているとする. このとき, $h : a \to d$ が各 l について $hi_l = \varphi_l$ をみたすとすると, $h = h1_a = h(i_1p_1 + \cdots + i_np_n) = \varphi_1p_1 + \cdots + \varphi_np_n$ として一意的に決まってしまう. 逆に, $h = \varphi_1p_1 + \cdots + \varphi_np_n$ と定義すると, $hi_l = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k p_k i_l = \varphi_l$. よってそのような h は一意的に存在する. つまり, $i_l : a_l \to a$ は余積である. すると, 各 l について, 各 k について $p_l i_k = \delta_{l,k}$ である p_l は一意的に存在する.

(15.7.2)⇒(15.7.1). $p_l i_k = \delta_{l,k}$ は仮定されている. よって各 k について,

$$(\sum_{l=1} i_l p_l) i_k = i_k = 1_a i_k.$$

余積の普遍性により, $\sum_l i_l p_l = 1_a$.

(15.7.1)⇔(15.7.3). 既に証明された (15.7.1)⇔(15.7.2) を, (15.5.1) を $\mathbb{Z}$ 圏 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ で考えたものに適用すれば良い. □

15.8 系. $\mathbb{Z}$ 圏 $\mathcal{A}$ において, $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ の双積 a は, 存在すれば同型を除いて一意的である. □

15.9 系. $n \geq 0$ とする. $\mathbb{Z}$ 圏 $\mathcal{A}$ の対象 $a, a_1, \ldots, a_n$ について, 次は同値である.

(15.9.1) a は $a_1, \ldots, a_n$ の双積である.

(15.9.2) a は $a_1, \ldots, a_n$ の余積である.

(15.9.3) a は $a_1, \ldots, a_n$ の積である.

□

(15.10) $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Z}$ 圏とする. 任意の $a, b \in \mathcal{A}$ が 2 項双積を持つとき, $\mathcal{A}$ は双積を持つ, という.

15.11 補題. $\mathbb{Z}$ 圏 $\mathcal{A}$ の対象 z について, 次は同値である.

(15.11.1) $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}\, z$ は零環である.

(15.11.2) z から z への射として, $1_z = 0$ である.

(15.11.3) z は (0 項の) 双積である.

(15.11.4) z は $\mathcal{A}$ の始対象である.

(15.11.5) z は $\mathcal{A}$ の終対象である.

(15.11.6) z は $\mathcal{A}$ の零対象である.

(15.11.7) 図式

$$z \underset{1_z}{\overset{1_z}{\rightleftarrows}} z \underset{1_z}{\overset{1_z}{\leftrightarrows}} z$$

は双積図式である.

(15.11.8) 図式 $z \xrightarrow{1_z} z \xleftarrow{1_z} z$ は余積である.

(15.11.9) 図式 $z \xleftarrow{1_z} z \xrightarrow{1_z} z$ は積である.

証明. (15.11.1)⇒(15.11.2). 零環には 1 個しか元がないので, $1_z \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}\, z$ と $0 \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}\, z$ は一致せざるを得ない.

(15.11.2)⇔(15.11.3) は既に説明した. (15.5) 参照.

(15.11.3)⇔(15.11.4)⇔(15.11.5) は系 15.9 の $n = 0$, $a = z$ の場合である.

(15.11.4)⇔(15.11.5) である以上, これらの条件は (15.11.6) とも同値である.

(15.11.2)⇒(15.11.7) は, $1_z 1_z = 1_z$, $1_z 1_z = 1_z$, $(1_z 1_z + 1_z 1_z) = 1_z + 1_z = 1_z + 0 = 1_z$ だから.

(15.11.7)⇒(15.11.8) は, 補題 15.7 から明白である.

(15.11.8)⇒(15.11.4) は, $a \in \mathcal{A}$ で $f \in \mathcal{A}(z, a)$ とするとき, $h 1_z = f$, $h 1_z = 0$ をみたす $h \in \mathcal{A}(z, a)$ が存在する. よって $f = h = 0$ である. つまり, $\mathcal{A}(z, a) = 0$ は任意の a について 1 個の元からなり, z は $\mathcal{A}$ の始対象である.

(15.11.1)⇔(15.11.9) は, 既に示されている (15.11.1)⇔(15.11.8) を $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ の対象 z に適用すれば示される. □

15.12 系. $\mathbb{Z}$ 圏 $\mathcal{A}$ について, 次は同値である.

(15.12.1) $\mathcal{A}$ は双積を持ち, 零対象を持つ.

(15.12.2) 任意の $n = 0, 1, 2, \ldots$ について, $\mathcal{A}$ は n 項の双積を持つ. つまり, 任意の $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ について, $a_1, \ldots, a_n$ の双積が存在する.

(15.12.3) $\mathcal{A}$ は有限余積を持つ.

(15.12.4) $\mathcal{A}$ は有限積を持つ.

証明. (15.12.1)⇒(15.12.2). $n = 0$ の場合は零対象の存在だから, 仮定されている. $n = 1$ の場合は, $a = a_1$, $i_1 = p_1 = 1_{a_1}$ とおけば良い. $n = 2$ の場合は「$\mathcal{A}$ が双積を持つ」というのが, 2 項双積の存在の意味であったから, 仮定されている. $n \geq 3$ のときは, 帰納法による. $j_l : a_l \to b$, $q_l : b \to a_l$ $(l = 1, \ldots, n-1)$ が帰納法の仮定で存在する双積図式とする.

$$b \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} a \underset{p_n}{\overset{i_n}{\leftrightarrows}} a_n$$

が (2 項) 双積とする. このとき, $i_l = ij_l$ $(l = 1, \ldots, n-1)$, $p_l = q_l p$ $(l = 1, \ldots, n-1)$ とおくと, $i_l : a_l \to a$, $p_l : a \to a_l$ $(l = 1, \ldots, n)$ が n 項双積になることは容易である.

(15.12.2)⇒(15.12.1) は自明である.

(15.12.2)⇔(15.12.3)⇔(15.12.4) は, 系 15.9 から明白である. □

15.13 補題. 零対象を持つ $\mathbb{Z}$ 圏 $\mathcal{A}$ の対象 a, b について, $f \in \mathcal{A}(a, b)$ が 0 である必要十分条件は, f が零射であることである.

証明. z を $\mathcal{A}$ の零対象とする. f が零射とすると, f は

$$a \xrightarrow{\varphi} z \xrightarrow{\psi} b$$

と分解する. このとき, $f = \psi\varphi = \psi 1_z \varphi = \psi 0 \varphi = 0$. $\mathcal{A}(a, b)$ の零射も $\mathcal{A}(a, b)$ の 0 も唯一つなので, 主張を得る. □

15.14 定義. $\mathcal{A}$ が**加法圏** **(additive category)** であるとは, $\mathcal{A}$ が $\mathbb{Z}$ 圏であって, 系 15.12 の同値な条件をみたすことをいう. 可換環 R について, R 圏が $\mathbb{Z}$ 圏と見たときに加法圏であるとき, 加法的 R 圏である, ということにする.

15.15 例. $R\,\mathrm{Mod}$ は加法的 R 圏である. R 加群 M と R の元 a について, a 倍写像 $a : M \to M$ $(m \mapsto am)$ が単射のとき, a は M の**非零因子** **(nonzerodivisor)** という. R 加群 M が**ねじれが無い** **(torsion-free)** とは, 任意の R 加群 R の非零因子 $a \in R$ が M の非零因子となることをいう. ねじれが無い R 加群からなる $R\,\mathrm{Mod}$ の充満部分圏も加法的 R 圏である. 一般に, R 圏の充満部分圏は R 圏であるが, 加法圏になるとは限らない.

(15.16) $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Z}$ 圏, $m, n \geq 0$ とし, $i_k : a_k \to a$, $p_k : a \to a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ と $j_l : b_l \to b$, $q_l : b \to b_l$ $(l = 1, \ldots, m)$ はそれぞれ n 項, m 項の双積図式とする. このとき, $\varphi \in \mathcal{A}(a, b)$ に対して, 行列 $(\varphi_{lk}) \in \prod_{l,k} \mathcal{A}(a_k, b_l)$ を対応させる. ただし, $\varphi_{lk} = q_l \varphi i_k$ である. この対応は $\mathbb{Z}$ 加群の同型

$$\mathcal{A}(a, b) \cong \prod_{l,k} \mathcal{A}(a_k, b_l)$$

を引き起こす ($\mathcal{A}$ が R 圏なら, R 加群の同型である). 実際, 加群の準同型であることは定義から明らかであり, 全単射であることは $i_k : a_k \to a$ $(k = 1, \dots, n)$ が余積で, $q_l : b \to b_l$ $(l = 1, \dots, m)$ が積だから明白だろう. (φ_{lk}) を φ の行列表示と呼ぶことにする.

15.17 補題. $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Z}$ 圏, $m, n, r \geq 0$ とし, $i_k : a_k \to a$, $p_k : a \to a_k$ $(k = 1, \dots, n)$ と $j_l : b_l \to b$, $q_l : b \to b_l$ $(l = 1, \dots, m)$ と $s_u : c_u \to c$, $t_u : c \to c_u$ $(u = 1, \dots, r)$ それぞれ n 項, m 項の双積図式とする. $\varphi \in \mathcal{A}(a, b)$, $\psi \in \mathcal{A}(b, c)$ とし, $(\varphi_{l,k})$ および $(\psi_{u,l})$ は対応する行列表示とする. このとき, $\psi\varphi$ の行列表示は $(\psi_{u,l})(\varphi_{l,k})$ である. すなわち, (u, k) 成分が $\sum_{l=1}^{m} \psi_{u,l}\varphi_{l,k}$ の行列である.

証明. これは

$$t_u\psi\varphi i_k = t_u\psi(\sum_{l=1}^{m} i_l p_l)\varphi i_k = \sum_l (t_u\psi i_l)(p_l\varphi i_k) = \sum_l \psi_{u,l}\varphi_{l,k}$$

から明白である. □

$\mathcal{A}$ が双積を持つ $\mathbb{Z}$ 圏, $n \geq 1$ とする. 各 $(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})^n$ に対して, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ に対する双積 $i_l(\underline{a}) : a_l \to a(\underline{a})$, $p_l(\underline{a}) : a(\underline{a}) \to a_l$ が与えられているとする. 与え方は, 具体的な圏 ($R\,\mathrm{Mod}$ など) では具体的に構成を与えるし, 抽象的な圏では, 単に存在を示して, 選択公理で選んだだけ, という場合も考えられる. このとき, $a(\underline{a})$ を $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n$ と表し, $a_1, \dots, a_n$ の**直和 (direct sum)** という. また, $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : \underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \to \underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ が与えられたとき, 行列表示が

$$\begin{pmatrix} f_1 & & & O \\ & f_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & f_n \end{pmatrix}$$

である射 $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \to b_1 \oplus \cdots \oplus b_n$ を $a(\underline{f}) = f_1 \oplus \cdots \oplus f_n$ で表す. 容易にわかるように, $a = ?_1 \oplus \cdots \oplus ?_n$ は関手 $\mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$ であり, i_l, p_l は自然変換である.

15.18 例. $\mathcal{A}$ が加法的 R 圏で, I は圏とすると, 関手圏 $\mathcal{A}^I$ は加法的 R 圏である. $\mathcal{A}$ には n 項直和が関手として入っているとして良い. このとき, $F, G \in \mathcal{A}^I$ について, $f, g \in \mathrm{Nat}(F, G)$, $r \in R$ について, $(f + g)_i = f_i + g_i$, $(rf)_i = rf_i$ とおけば自然に $\mathrm{Nat}(F, G)$ は R 加群であり, 容易に $\mathcal{A}^I$ は R 圏だと確かめられる. また, $(F \oplus G)(i) = Fi \oplus Gi$ で容易に関手的な双積を構

成することができる. 零対象が存在することも $Zi = 0$ と定義すれば良いから明らかである. 以上により, $\mathcal{A}^I$ は加法的 R 圏となった.

(15.19) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ が $\mathbb{Z}$ 圏, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が関手とする. F が n 項双積を保つとは, 任意の n 項双積図式

$$i_l : a_l \to a, \quad p_l : a \to a_l \quad (l = 1, \ldots, n)$$

に対して,

$$Fi_l : Fa_l \to Fa, \quad Fp_l : a \to Fa_l \quad (l = 1, \ldots, n)$$

が再び n 項双積図式になることをいう. 2 項双積を保つとき, 単に双積を保つという.

(15.20) $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Z}$ 圏, $m, n \geq 0$ とし, $i_k : a_k \to a$, $p_k : a \to a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ と $j_l : b_l \to b$, $q_l : b \to b_l$ $(l = 1, \ldots, m)$ はそれぞれ n 項, m 項の双積図式とする. $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は m 項, n 項の双積を保つとする. このとき, $\varphi : a \to b$ の行列表示が $(\varphi_{l,k})$ だとしたら, $F\varphi : Fa \to Fb$ の行列表示は $(F\varphi_{l,k})$ である.

(15.21) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が R 圏で $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は関手とする. F が R **関手 (R-functor)** であるとは, 任意の $a, a' \in \mathcal{A}$ に対して, $F : \mathcal{A}(a, a') \to \mathcal{B}(Fa, Fa')$ が R 加群の準同型であることをいう. $\mathbb{Z}$ 関手は**加法的関手 (additive functor)** と言う.

15.22 補題. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ が $\mathbb{Z}$ 圏で, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が関手とする. $\mathcal{A}$ が加法圏のとき, 次は同値である.

(15.22.1) F は加法的である.

(15.22.2) F は任意の $n \geq 0$ について, n 項双積を保つ.

(15.22.3) F は双積を保つ.

(15.22.4) F は有限余積を保つ.

(15.22.5) F は 2 個の対象の余積を保つ.

(15.22.6) F は有限積を保つ.

(15.22.7) F は 2 個の対象の積を保つ.

証明. (15.22.1)⇒(15.22.2).

$$i_l : a_l \to a, \quad p_l : a \to a_l \quad (l = 1, \ldots, n)$$

が双積図式とする. つまり $p_l i_l = 1$, $p_l i_k = 0$ $(k \neq l)$, $\sum_l i_l p_l = 1$ とする. F を施して, F の加法性により, $F(p_l)F(i_l) = 1$, $F(p_l)F(i_k) = 0$, $(k \neq l)$, $\sum_l F(i_l)F(p_l) = 1$. つまり, F は n 項双積を保つ.

(15.22.2)⇒(15.22.3) は明らかである.

(15.22.3)⇒(15.22.1). F は $n = 1, 2$ について, n 項双積を保つ. よって, $(m, n) \in \{1, 2\}^2$ のとき, n 項双積から m 項双積への射の行列表示を保つ. 一方, $f, g : a \to b$ が $\mathcal{A}$ の平行対のとき, $f + g$ は

$$a \xrightarrow{\binom{1}{1}} a \oplus a \xrightarrow{(f,g)} b$$

の合成であるから, $F(f + g)$ は

$$Fa \xrightarrow{\binom{1}{1}} Fa \oplus Fa \xrightarrow{(Ff,Fg)} Fb \tag{15.22.8}$$

の合成である. つまり, $F(f + g) = Ff + Fg$ である.

(15.22.2)⇒(15.22.4).

$$i_l : a_l \to a \quad (l = 1, \ldots, n)$$

が余積とする. 補題 15.7 により, これを一意的に補完して, 双積図式

$$i_l : a_l \to a, \quad p_l : a \to a_l \quad (l = 1, \ldots, n)$$

を得る. すると仮定から,

$$Fi_l : Fa_l \to Fa, \quad Fp_l : Fa \to Fa_l \quad (l = 1, \ldots, n)$$

は双積図式であるが, 再び補題 15.7 により,

$$Fi_l : Fa_l \to Fa \quad (l = 1, \ldots, n)$$

は余積である.

(15.22.4)⇒(15.22.5) は自明である.

(15.22.5)⇒(15.22.3). 仮定により $\mathcal{A}$ は零対象 z を持つ. $z \xrightarrow{1_z} z \xleftarrow{1_z} z$ は補題 15.11 によって, 余積である. F は 2 項余積を保つので, $Fz \xrightarrow{1_{Fz}} Fz \xleftarrow{1_{Fz}} Fz$

は余積であり, 再び補題 15.11 によって, Fz は零対象である. よって, 零射は F によって零射に写る. さて,

$$a \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} b \underset{q}{\overset{j}{\leftrightarrows}} c$$

が双積図式とすると, $\sigma = a \xrightarrow{i} b \xleftarrow{j} c$ が余積で, $pi = 1$, $pj = 0$, $qi = 0$, $qj = 1$ である. すると $F\sigma$ も余積で, F は零射を零射に写したから, $F(p)F(i) = 1$, $F(p)F(j) = 0$, $F(q)F(i) = 0$, $F(q)F(j) = 1$ である. つまり, $F\sigma$ は双積図式であり, F は双積を保つ.

(15.22.3)⇔(15.22.6)⇔(15.22.7) は, 既に証明した (15.22.3)⇔(15.22.4)⇔(15.22.5) の双対である. □

15.23 系. $\mathcal{A}$ が加法圏, $\mathcal{B}$ が $\underline{\mathrm{Ab}}$ 圏, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が関手とする. もし F が左随伴か, 右随伴を持てば, F は加法的関手である. 特に F が同値ならば, F は加法的関手である. □

証明. 補題 15.22, 定理 12.43 および 系 12.44 から明白である. □

15.24 系. $\mathcal{C}$ は圏とする. このとき, $\mathcal{C}$ を加法圏にするような各 $a, b \in \mathcal{C}$ に対する $\mathcal{C}(a, b)$ の加法構造の入れ方は, 存在したとしてもただ一通りである.

証明. $\mathcal{C}$ に 2 通りの加法構造があるとして, それらを入れたものを $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ とする. $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \to \mathcal{C} = \mathcal{C}_2$ は同値なので, 加法的関手である. 特に, 各 $a, b \in \mathcal{C}$ に対して, 恒等写像 $\mathcal{C}_1(a, b) \to \mathcal{C}_2(a, b)$ が $\mathbb{Z}$ 加群の同型である. つまり, $\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ の加法構造は一致する. □

15.25 例. $\mathcal{A}$ が $\mathcal{U}$ 圏で R 圏とする. このとき, $a \in \mathcal{A}$ について, $\mathcal{A}[a, -] : \mathcal{A} \to R\,\mathrm{Mod}$ は R 関手である. 実際, $f : b \to c$ と $h, h' \in \mathcal{A}[a, b]$ と $r, r' \in R$ について,

$$\mathcal{A}[a, f](rh + r'h') = f(rh + r'h') = rfh + r'fh' = r\mathcal{A}[a, f]h + r'\mathcal{A}[a, f]h'.$$

同様に, $\mathcal{A}[-, a] : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to R\,\mathrm{Mod}$ も R 関手になる.

15.26 例. R 加群 M について, $? \otimes_R M$, $\mathrm{Hom}_R(M, ?)$, $\mathrm{Hom}_R(?, M)$ はいずれも R 関手である.

15.27 演習. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が R 圏で, $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が関手で, $F \cong G$ とする. このとき, F が R 関手ならば, G も R 関手である.

15.28 補題. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ が R 圏で, $(F, G, \pi, \eta, \varepsilon) : \mathcal{A} \rightharpoonup \mathcal{B}$ は随伴対とする. このとき次は同値である.

(15.28.1) G は R 関手.

(15.28.2) $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ について, $\pi_{a,b} : \mathcal{B}(Fa, b) \to \mathcal{A}(a, Gb)$ は R 加群の同型である.

(15.28.3) F は R 関手.

証明. (15.28.1)⇒(15.28.2). $f \in \mathcal{B}(Fa, b)$ について, $\pi(f) = Gf \circ \eta_a$ であったから, 容易である.

(15.28.2)⇒(15.28.1). $f \in \mathcal{B}(b, b')$ について, $Gf = Gf \circ (G\varepsilon_b)(\eta_{Gb}) = \pi(f\varepsilon_b)$ だから明白.

(15.28.2)⇔(15.28.3) は既に証明された (15.28.2)⇔(15.28.1) を随伴対 $(G^{\mathrm{op}}, F^{\mathrm{op}}, \pi^{-1}, \varepsilon, \eta) : \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \rightharpoonup \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ に適用すれば良い. □

15.29 補題. $\mathcal{A}$ は加法的 R 圏, $F, G : \mathcal{A} \to R\,\mathrm{Mod}$ は R 関手, $\alpha : UF \to UG$ は自然変換とする. ここに $U : R\,\mathrm{Mod} \to \underline{\mathrm{Set}}$ は忘却関手. このとき, 各 $a \in \mathcal{A}$ について $\alpha_a : (UF)a \to (UG)a$ は R 加群の準同型である. 従って, 一意的な自然変換 $\tilde{\alpha} : F \to G$ が存在して, $\alpha = U\tilde{\alpha}$ である.

証明. $a \in \mathcal{A}$ として, $f_1, f_2 \in Fa$ とする.

$$a \underset{p_1}{\overset{i_1}{\rightleftarrows}} a \oplus a \underset{p_2}{\overset{i_2}{\leftrightarrows}} a$$

を双積図式とする.

$$\begin{aligned}
&\alpha(f_1{+}f_2) = \alpha(F(p_1{+}p_2)Fi_1f_1{+}F(p_1{+}p_2)Fi_2f_2) = \alpha F(p_1{+}p_2)(Fi_1f_1{+}Fi_2f_2)\\
&= G(p_1{+}p_2)\alpha(Fi_1f_1{+}Fi_2f_2) = G(p_1{+}p_2)(Gi_1Gp_1{+}Gi_2Gp_2)\alpha(Fi_1f_1{+}Fi_2f_2)\\
&= G(p_1+p_2)(Gi_1\alpha(Fp_1Fi_1f_1 + Fp_1Fi_2f_2) + Gi_2\alpha(Fp_2Fi_1f_1 + Fp_2Fi_2f_2))\\
&= G(p_1+p_2)(Gi_1\alpha f_1 + Gi_2\alpha f_2) = G(p_1+p_2)Gi_1\alpha f_1 + G(p_1+p_2)Gi_2\alpha f_2\\
&= \alpha f_1 + \alpha f_2.
\end{aligned}$$

よって α は加法を保つ.

次に $f \in Fa$, $r \in R$ とする. F が R 関手なので, r 倍写像 $(r : Fa \to Fa) \in \mathrm{Hom}_R(Fa, Fa)$ は, $r \cdot 1_{Fa} = rF1_a = F(r1_a)$ であることに注意する.

α の自然性により,

$$\alpha(rf) = \alpha F(r1_a)(f) = G(r1_a)\alpha(f) = r\alpha(f).$$

これが示すべき事であった. □

15.30 系. $\mathcal{A}$ が R 圏である $\mathcal{U}$ 圏で, $K : \mathcal{A} \to R\,\mathrm{Mod}$ は R 関手とする. もし $UK : \mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が表現可能であれば, ある $a \in \mathcal{A}$ と, ある $R\,\mathrm{Mod}$ への関手の間の自然同型 $\tilde{\psi} : \mathcal{A}[a, -] \to K$ が存在する.

証明. ある $a \in \mathcal{A}$ と自然同型 $\psi : \mathcal{A}(a, -) \to UK$ が存在する. $\mathcal{A}(a, -) = U\mathcal{A}[a, -]$ なので, 補題 15.29 を適用すれば良い. □

以下の例と演習が, 本講義の終着駅である.

15.31 例. $F : R\,\mathrm{Mod} \to R\,\mathrm{Mod}$ が連続関手とすると, $UF : R\,\mathrm{Mod} \to \underline{\mathrm{Set}}$ も連続である. よって UF は表現可能 (例 14.24 参照). よって, ある $M \in R\,\mathrm{Mod}$ について, $R\,\mathrm{Mod}$ への関手として, $F \cong \mathrm{Hom}_R(M, -)$ である. 同様にして, $G : R\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}} \to R\,\mathrm{Mod}$ が連続関手ならば, $R\,\mathrm{Mod}$ への関手として $G \cong \mathrm{Hom}_R(-, M)$ である.

15.32 例. $(R, \mathfrak{m})$ は d 次元のネーター局所環とする. $E = E_R(R/\mathfrak{m})$ は剰余体の入射包絡とする. 次元の局所コホモロジー $H^d_{\mathfrak{m}}(-)$ は, $H^{d+1}_{\mathfrak{m}}(-) = 0$ であることから容易に, 直和を保って右完全である. つまり, 余極限を保つ. 一方, $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ は余極限を極限にうつす. よって, $F = \mathrm{Hom}_R(H^d_{\mathfrak{m}}(-), E)$ は, 余極限を極限にうつすので, $F \cong \mathrm{Hom}_R(-, \omega)$ となる R 加群がある. つまり,

$$\mathrm{Hom}_R(H^d_{\mathfrak{m}}(M), E) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \omega).$$

そして, $\omega \cong F(R) \cong \mathrm{Hom}_R(H^d_{\mathfrak{m}}(R), E)$ である. R が完備局所環のとき, ω は有限生成加群である.

15.33 演習. $F : R\,\mathrm{Mod} \to R\,\mathrm{Mod}$ が小さい余極限を保つ共変関手であるとき, ある R 加群 M が存在して, $R\,\mathrm{Mod}$ への関手として, $F \cong ? \otimes_R M$.

16 補足のお話し

(16.1) ここまで勉強してきた人は, このあとさらに進んだ圏論の勉強がしたいが, 何を学べばいいのだろう, と考えている人もいるのではないだろうか. それはあなた次第です, というのが答えである. この講義の担当者は, 深く圏論やホモロジー代数を勉強したわけでもない. しかし, アドバイスゼロというわけにもいかないので, 環論, 代数幾何などの代数方面へ進みたい人を念頭に, ある程度の助言を兼ねて, できるお話しをしてみよう.

(16.2) 圏一般に関して, ということになると, [McL] の講義できなかった部分 (VI 章以降のほとんどの部分) がとりあえずのお勧めである. モナド, モノイダル圏, 閉圏, 単体圏, アーベル圏など, 重要事項を解説している. 我々が学んだ部分に相当する V 章までが, 圏論を学ぶのに絶対だったのに反し, 一部専門的 (過ぎるの) ではないか, と思われる話題も解説されている.

(16.3) 本講義ではホモロジー代数について, 何一つ触れることができなかった. ホモロジー代数はかなり多くの代数, 幾何の分野で, 程度の違いこそあれ, 必要である. その初歩は環と加群の言葉で学べる (例えば [Kaw1] はお勧め) が, **層 (sheaf)** をはじめとする, 環上の加群以外の具体例を知ってしまうと, ホモロジー代数の一般論は**アーベル圏 (abelian category)** でなされるべきであることを知ることになる. せめて, ということでアーベル圏と完全関手を定義しよう.

16.4 定義. $\mathcal{A}$ がアーベル圏であるとは, $\mathcal{A}$ が加法圏であって,

(16.4.1) 任意の射は核と余核を持つ.

(16.4.2) 単射はある射の核である. 全射はある射の余核である.

が成立することを言う.

(16.5) 環 A に対して, 左 A 加群の圏 $A\,\mathrm{Mod}$ はアーベル圏である.

アーベル圏からアーベル圏への関手 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は, 核を保つとき**左完全関手 (left exact functor)**, 余核を保つとき, **右完全関手 (right exact functor)**, 核と余核を保つとき, **完全関手 (exact functor)** という. 定理 12.43 により, 右随伴関手は左完全である. 系 12.44 により, 左随伴関手は右完全である. よって圏同値は完全である. $? \otimes_R M : R\,\mathrm{Mod} \to R\,\mathrm{Mod}$ は左随伴だから右完全であり, $\mathrm{Hom}_R(M, ?) : R\,\mathrm{Mod} \to R\,\mathrm{Mod}$ は右随伴だから左完全である. 一般に環 A 上の左加群 M について, $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ は左完全である. これが完全関手であるとき, M は**射影的 (projective)** であるという.

アーベル圏については, [Kaw], [McL] を参照して欲しい. ホモロジー代数一般の教科書としては, [Wbl] がある. 本講義担当者はほとんど読んでいないが, 評判は良いと思う.

幾何を勉強するには層を学ぶ必要がある. そして, 層論はホモロジー代数の重要な具体例を与える. とりあえずの知識は [Kaw] で学べるし, 丁寧に書かれた代数幾何学の教科書 (例えば [Har2]) では層について必要な知識を解説してくれている. 代数幾何で一番良く現れる (準) 連接層とは違う, 「局所定数層系の」層を学ぶには [Ivr] がある. 本講義担当者はほとんど読んでいないが, 評判は良いと思う. アーベル圏, 導来圏の解説もあり, ホモロジー代

数の入門を兼ねることもできるのではないかと思う. なお, 代数幾何的な状況にも「局所定数層系の」層論は持ち込まれていて, エタールコホモロジーの理論はそれに当る.

(16.6) アーベル圏の中でもとりわけ (余) 極限操作について良い振舞いをするのが **Grothendieck 圏 (Grothendieck category)** である. $\mathcal{A}$ が小余完備で生成子を持つ, $\mathcal{U}$ 圏であるようなアーベル圏で, 次の条件をみたすとき, $\mathcal{A}$ は Grothendieck 圏という: I が小さい有向集合 (つまり, 任意の 2 元からなる部分集合 $\{i,j\} \subset I$ に対して, その上界が存在するような小さい順序集合), $F, G, H : I \to \mathcal{A}$ が関手で, 各 i について

$$0 \to F_i \to G_i \to H_i \to 0$$

が完全ならば, 誘導される列

$$0 \to \varinjlim F_i \to \varinjlim G_i \to \varinjlim H_i \to 0$$

も完全列である. 重要なアーベル圏で, Grothendieck 圏にもなっているものは多い.

位相空間 X と, X 上の環の層 $\mathcal{O}$ に対して, 左 $\mathcal{O}$ 加群層のなす圏は Grothendieck 圏である. 特に, 環 A に対して, 左 A 加群全体のなす圏は Grothendieck である. また, 可換環 R と, R 平坦な余代数 H に対して, 右 H 余加群全体のなす圏は Grothendieck である.

アーベル圏 $\mathcal{A}$ の対象 I が**入射的 (injective)** であるとは, $\mathcal{A}(?, I) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ が完全 (つまり, 核と余核を保つ) であることをいう. アーベル圏 $\mathcal{A}$ が十分多くの単射的対象を持つとは, 任意の $a \in \mathcal{A}$ に対して, ある入射的対象 I と単射 $a \to I$ が存在することを言う. アーベル圏 $\mathcal{A}$ が十分多くの単射的対象を持つということは, $\mathcal{A}$ でホモロジー代数を展開する際に大変役に立つ. 任意の $\mathcal{A}$ の対象が入射的分解を持つからである.

Grothendieck は, Grothendieck 圏は十分多くの単射的対象を持つことを示した [Gro]. Grothendieck 圏は, 後で述べる導来圏とも馴染みがいいことが分かってきている. すなわち, $\mathcal{A}$ が Grothendieck 圏, $\mathbb{M}$ が $\mathcal{A}$ 上のチェイン複体ならば, ある K-injective complex $\mathbb{I}$ と擬同型 $\mathbb{M} \to \mathbb{I}$ が存在する [Frk]. これは要するに, 非有界導来圏 $D(\mathcal{A})$ 上での導来関手の存在を保証する定理である.

また, Grothendieck 圏は well-powered かつ co-well-powered である. 従って, $K : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が連続であれば表現可能である. また, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が小さい余極限を保ち, $\mathcal{B}$ が擬 $\mathcal{U}$ 圏ならば, 右随伴関手 $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が存在する. また, Grothendieck 圏は小完備で余生成子を持つことも知られている. 従って,

$K : \mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ が連続であれば表現可能である. また, $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が連続で, $\mathcal{B}$ が擬 $\mathcal{U}$ 圏ならば, 左随伴関手 $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ を持つ. これらの表現可能性定理は, Neeman の Brown representability (後述) のもとになっていると考えられる.

(16.7) ホモロジー代数のここ 20, 30 年での成長株は導来圏の話題だろう. 従って, 比較的新しい教科書の [Wbl] でも一章を割いて解説している.

R が可換環のとき, (コ) ホモロジー関手 $H^i : C(R) \to R\,\mathrm{Mod}$ はホモトピー圏 $K(R)$ を経由することは学んだ. コホモロジーを扱うのに, $C(R)$ を扱うより, $K(R)$ を扱った方が都合が良い場合がある. しかし, $K(R)$ に局所化と呼ばれるある操作を加えて得られる, 導来圏 (derived category) $D(R)$ を扱うと, もっとコホモロジーの取り扱いが透明になる場合がある. 複雑な Grothendieck スペクトル系列も導来圏の世界では簡単な合成に関する公式になる.

導来圏が導入された動機は, 双対性の一般化であり, トポロジーにおける **Poincaré 双対性 (Poincaré duality)** の一般化である **Verdier 双対性 (Verdier duality)**, 代数幾何における Serre の双対性の一般化である Grothendieck の固有射に関する双対性は, いずれも導来圏の言葉なしに記述が不可能な $f^!$ (ねじれ逆像) を使って記述される. これは 1960 年代の事である. これまで, $f^!$ の構成はいろいろな状況で重要問題とされてきた. Verdier 双対性については [Ivr] で解説されている. 必要な導来圏の知識についても解説がなされている. Grohendieck 双対性については [Har] がオリジナルであり, やはり導来圏の解説も兼ねている. Verdier および Grothendieck の双対性の記述に共に現れた双対化複体の概念は重要であり, 特に, Grothendieck の仕事に現れた**双対化複体 (dualizing complex)** は, 可換環論で極めて重要な道具となっていった. D 加群を扱う際には, より基本的と思われる順像 $\int_f$ を定義するのにも導来圏の言葉を用いる (例えば [谷堀]).

(16.8) 1980 年代になると, 多元環の表現論の世界で, 導来圏の重要度が増した.

環 A と環 B が**森田同値 (Morita equivalent)** であるとは, $A\,\mathrm{Mod}$ と $B\,\mathrm{Mod}$ が圏同値であることである. 環 A の上の加群を調べることの多くの部分は, $A\,\mathrm{Mod}$ を調べることに帰着し, そういう問題を考える限りは, 森田同値な別の環 B を調べても同値なのだから良いという事になる. A と B が森田同値になるための必要十分条件は森田の定理によって与えられている. $A\,\mathrm{Mod}$ と $B\,\mathrm{Mod}$ が森田同値であるための必要十分条件は, ある有限生成な射影的生成子 P が存在して, $B^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_A P$ であることである. このとき, $\mathrm{Hom}_A(P, -) : A\,\mathrm{Mod} \to B\,\mathrm{Mod}$ が具体的な同値を与え, 準逆は $P \otimes_B -$ で与

えられる.

Rickard [Ric] がこの森田の理論の導来圏バージョンを提出したのである (先行する結果が Happel, Cline–Parshall–Scott によって出されている). Rickard は現在**傾斜複体 (tilting complex)** と呼ばれるものを定式化し, 導来圏 $D^b(A) := D^b(A\,\mathrm{Mod})$ と $D^b(B)$ が 3 角同値になる (このことを, A と B が**導来同値 (derived equivalent)** であるという) ための必要十分条件は, ある A の傾斜複体 T が存在して, $B \cong \mathrm{End}_{D(A)}(T)^{\mathrm{op}}$ であることであることを示した. このとき, $R\,\mathrm{Hom}_A(T, -)$ は同値で, $T \otimes^L_B -$ が準逆である ($R\,\mathrm{Hom}_A$ や $\otimes^L_B$ は**導来関手 (derived functor)** とよばれるもので, Hom_A や $\otimes_B$ の導来圏バージョンなのである). A 加群 M は複体

$$\cdots \to 0 \to 0 \to M \to 0 \to 0 \to \cdots$$

と同一視しすることができ, その複体の類は, 導来圏 $D^b(A)$ の対象と見なすことが出来る. これにより, 自然な忠実充満な加法的関手 $A\,\mathrm{Mod} \to D^b(A)$ が定まる. A 加群 T が ($D^b(A)$ で見て) 傾斜複体のとき, **傾斜加群 (tilting module)** という (さらに追加的な条件 $\mathrm{proj.dim}_A T \leq 1$ を要請する場合は多い). Rickard の仕事以前に, 傾斜加群は, Brenner–Butler [BB] や宮下 [Miy] によって調べられていた. 箙の表現の話題での矢の向きを変える操作 (reflection) を一般化して, 傾斜 (加群) の概念は認識されていたのである. つまり, 傾斜複体は既にあった傾斜加群の概念の一般化だった.

(16.9) 代数幾何学の分野では, 導来圏は単なる双対性の記述の道具から, 調べるべき対象そのものへと変化した.

通常の体上の代数多様体よりはるかに一般なネータースキームとよばれるもの X について, X はその連接層のアーベル圏 $\mathrm{Coh}(X)$ から復元される [Gab]. 特にネータースキーム X, Y について, $\mathrm{Coh}(X)$ と $\mathrm{Coh}(Y)$ が同値であれば, $X \cong Y$ である. それでは, 2 つの射影多様体 $D^b(X) = D^b(\mathrm{Coh}(X))$ と $D^b(Y) = D^b(\mathrm{Coh}(Y))$ について, $D^b(X)$ と $D^b(Y)$ はいつ 3 角同値になるか? 向井茂は**積分関手** (またの名を **Fourier–向井変換**) を使って, アーベル多様体 X とその双対 $\hat{X}$ について, $D(X) \cong D(\hat{X})$ を示した [Muk]. 後に Orlov は体上の smooth projective varieties X, Y について, 3 角同値 $\Phi : D^b(X) \to D^b(Y)$ は Fourier–向井変換であることを示した. Fourier–向井変換 (の核) は多元環での傾斜 (複体) に相当するような存在であると思う. 現在までに, 代数多様体 X と Y について, いつ $D^b(\mathrm{Coh}(X)) \cong D^b(\mathrm{Coh}(Y))$ か, ということは色々調べられているそうである.

また, (圏論的) McKay 予想という, 有限部分群 $G \subset SL(n, \mathbb{C})$ に対して, クレパント特異点解消 $Y \to \mathbb{C}^n /\!/ G$ が存在すれば, $D^b(\mathrm{Coh}(G, \mathbb{C}^n))$ と

$D^b(\mathrm{Coh}(Y))$ は 3 角同値であろう, という予想が調べられているそうであるが, 代数学の様々な分野が同時進行で導来化してきていると感じる.

(16.10) 1990 年代には, Neeman によって, ステートメントも証明も純粋に圏論的であるが, 圏論の専門家以外にもインパクトの大きい定理が証明される [Nee]. Brown representability と呼ばれる定理であり, 3 角圏上定義される関手の表現可能性や, 右随伴の存在を保証する定理であり, 我々が学んだ特殊随伴関手定理の類似である. 導来圏・三角圏に関する良い定理の中には, アーベル圏, 加法圏の定理の一般化または類似の形になっているものが多いと思う.

さて, なぜ Brown representability が専門家以外にもインパクトがあるかというと, 先に述べたねじれ逆像 $f^!$ は (f が固有射の場合に) 導来順像 $Rf_* : D_{\mathrm{Qch}}(X) \to D_{\mathrm{Qch}}(Y)$ の右導来関手なのであり, Brown representability から, その性質はともかく, 存在だけは直ちに言えてしまうからである. 古来 $f^!$ をいかにして構成するか, という問題は決して易しい話ではなかったのである. Neeman の示した Brown representability は, 無限直和を持つ 3 角圏でなければ使えない. 有界性のついた導来圏というのは, 馴染みやすいのだが, 無限直和を持たない. というわけで, この定理は非有界導来圏の地位を高めた. なお, 非有界導来圏での導来関手の存在については, Spaltenstein [Spl] が良い仕事をしており, Neeman の仕事が重要なものとなったのは Spaltenstein の仕事に負うところが大きいと思う.

(16.11) 謝辞. この講義を準備するにあたり, 石井亮先生, 伊山修先生, 高橋亮先生, 宮地淳一先生, 吉野雄二先生から貴重な助言を頂きました. ここに厚くお礼申し上げます. また, この授業を最後まで熱心に聞いてくださり, 有益な指摘や質問をしてくださった受講者の皆さんに感謝します. また, コピー取りや黒板ふきを買って出てくれた大渓正浩氏にこの場を借りてお礼申し上げます.

(16.12) 本講義ノートは `http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hasimoto` から入手可能です.

A. 演習問題解答

必ず自分で考えてから解答を見てください.

(A.1) (2.6) の解答.

(2.6.1) $x \subset y$ だから (2.5.4) により $x \in \mathcal{P}(y) \in \mathcal{U}$. (2.5.2) により $x \in \mathcal{U}$.

(2.6.2) (2.5.1) と (2.6.1) により明白である.

(2.6.3) $\emptyset$ は $\mathbb{N}$ の部分集合だから.

(2.6.4) $f : \{1,\dots,n\} \to \mathcal{U}$ を $f(i) = x_i$ で定義すれば写像である. $\{1,\dots,n\} \subset \mathbb{N}$ なので, $\{1,\dots,n\} \in \mathcal{U}$. よって (2.5.3) により, $x_1 \cup \cdots \cup x_n \in \mathcal{U}$.

(2.6.5) 各 i に対して, $\mathcal{P}(x_i) \in \mathcal{U}$. $\{x_i\} \subset \mathcal{P}(x_i)$ だから $\{x_i\} \in \mathcal{U}$. (2.6.4) により, $\{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\} = \{x_1,\dots,x_n\} \in \mathcal{U}$.

(2.6.6) 各 i に対して, (2.6.5) によって $\{x_1,\dots,x_i\} \in \mathcal{U}$. もう一度 (2.6.5) によって

$$(x_1,\dots,x_n) = \{\{x_1\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_2,x_3\},\dots,\{x_1,\dots,x_n\}\} \in \mathcal{U}.$$

(2.6.7) 濃度の定義により, 全単射 $g : x \to x'$ が存在する. $z \in y$ なら, $y \subset \mathcal{U}$ なので $z \in \mathcal{U}$. よって $\{z\} \in \mathcal{U}$. そこで, $h : x \to \mathcal{U}$ を, $h(s) = \{fg(s)\}$ と定義する. すると (2.5.3) により, $y = \bigcup_{s \in x} h(s) \in \mathcal{U}$.

(2.6.8) $x \in \mathcal{U}$, $\equiv$ は x の同値関係とすると, $x/\equiv \subset \mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$. よって $x/\equiv \in \mathcal{U}$.

(2.6.9) $x, y \in \mathcal{U}$ と $s \in x, t \in y$ に対して, $(s,t) = \{\{s\},\{s,t\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$. よって $x \times y \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$. (2.6.4) によって $x \cup y \in \mathcal{U}$ なので, $\mathcal{P}(x \cup y) \in \mathcal{U}$ であり, 従って $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) \in \mathcal{U}$. よって $x \times y \in \mathcal{U}$.

(2.6.10) $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}^2 \in \mathcal{U}$ の商集合だから $\mathcal{U}$ の元. 従って $\mathbb{Z}^2 \in \mathcal{U}$ となり, その部分集合である $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ も $\mathcal{U}$ の元であり, その商集合である $\mathbb{Q}$ も $\mathcal{U}$ の元である.

(2.6.11) $\mathrm{Map}(x,y) \subset \{(x,y,z) \mid z \in \mathcal{P}(x \times y)\} \in \mathcal{U}$ から明白.

(2.6.12) $\mathbb{R}$ は $\mathrm{Map}(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ の部分集合の商集合だから $\mathcal{U}$ の元. $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ だから $\mathcal{U}$ の元.

(2.6.13) $\bigcup_{i \in I} f(i)$ は (2.5.3) により $\mathcal{U}$ の元. $\prod_{i \in I} f(i)$ は $\mathrm{Map}(I, \bigcup_{i \in I} f(i))$ の部分集合だから $\mathcal{U}$ の元.

(2.6.14) $I \neq \emptyset$ なので, $i_0 \in I$ が取れる. $\bigcap_{i \in I} f(i)$ は $f(i_0)$ の部分集合なので $\mathcal{U}$ の元である. $\square$

(A.2) (4.5) の解答. $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, s, t, \circ)$ とすると, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, t, s, \circ')$ だった. $\mathcal{B} = (\mathcal{O}', \mathcal{M}', s, t, \circ)$ が $\mathcal{C}$ の部分圏とする. このとき, $\mathcal{M}' \subset t^{-1}(\mathcal{O}') \cap s^{-1}(\mathcal{O}')$ であり, $1(\mathcal{O}') \subset \mathcal{M}'$ であり, $\circ'((\mathcal{M}' \times \mathcal{M}') \cap \mathcal{M}_2(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})) = \circ((\mathcal{M}' \times \mathcal{M}') \cap \mathcal{M}_2(\mathcal{C})) \subset \mathcal{M}'$. よって $(\mathcal{O}', \mathcal{M}')$ は $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の部分圏を定め, $\mathcal{B}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{O}', \mathcal{M}', t, s, \circ')$ は $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の部分圏である.

さらに $\mathcal{B}$ が充満部分圏とすると, $b, b' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ について,

$$\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,b') = \mathcal{B}(b',b) = \mathcal{C}(b',b) = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b',b).$$

これは $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ が $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の充満部分圏であることを示す. $\square$

(A.3) (6.2) の解答.

(6.2.1). $X \in \underline{\mathrm{Set}}$ と $A \in f_\#(X)$ に対して, $(1_X)_\#(A) = 1_X(A) = A = 1_{X_\#}(A)$. つまり, $(1_X)_\# = 1_{X_\#}$. また, $\underline{\mathrm{Set}}$ の射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ と $A \subset X$ に対して, $(g \circ f)_\#(A) = (g \circ f)(A) = g(f(A)) = g_\# f_\#(A)$. すなわち, $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$. 以上により, $(?)_\#$ は関手である.

(6.2.2). $X \in \underline{\mathrm{Set}}$ と $A \in f^\#(X)$ に対して, $(1_X)^\#(A) = 1_X^{-1}(A) = A = 1_{X^\#}(A)$. つまり, $(1_X)^\# = 1_{X^\#}$. また, $\underline{\mathrm{Set}}$ の射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ と $C \subset Z$ に対して, $(g \circ f)^\#(C) = (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}g^{-1}(C) = f^\# g^\#(C)$. つまり, $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$. 以上により, $(?)^\#$ は反変関手である. □

(A.4) (6.20) の解答.

順序集合 P に対して, P の poset ideal が P の開集合であるとして, P は位相空間になる. $F : \underline{\mathrm{Ord}} \to \underline{\mathrm{Top}}$ を $F(P) = P$, $F(f) = f$ で定義すると, F は関手である. □

(A.5) (7.5) の解答.

どちらも単なる写像として単射であることがそれぞれの圏で単射であるための必要十分条件となる. 実際, 十分条件であることは補題 7.3 によって明らかである. 次に, $f : G \to G'$ が $\underline{\mathrm{Grp}}$ の単射とすると, $f_* : \underline{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \to \underline{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}, G')$ は単射である. ところで, $\zeta_G : G \to \underline{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}, G)$ $(\zeta_G(g)(n) = g^n)$ は全単射. $\zeta_{G'} f = f_* \zeta_G$ は容易なので, f は写像として単射である. $\underline{\mathrm{Grp}}(\mathbb{Z}, G)$ の代わりに, $\zeta_R : R \to \underline{\mathrm{Rng}}(\mathbb{Z}[x], R)$ $\zeta_R(r)(f(x)) = f(r)$ を考えれば, $\underline{\mathrm{Rng}}$ についても同様の結果を得る. □

(A.6) (7.7) の解答.

証明. 十分性を示す. f^* が単射だが, f は全射でないとして矛盾を示す. f は全射でないので, $b \in B \setminus f(A)$ が取れる. このとき, $g_0 : B \to \mathbf{2} = \{0, 1\}$ を, $g_0(x) = 0$ $(x \in B)$ で定める. また, $g_1 : B \to \mathbf{2}$ を $g_0(x) = 0$ $(x \in B \setminus \{b\})$, $g_0(b) = 1$ で定める. $g_0 f = g_1 f$ は容易であり, 仮定により, $g_0 = g_1$. これは矛盾である.

必要性を示す. C を任意の集合とし, g_0, g_1 は $\mathrm{Map}(B, C)$ の元で, $g_0 f = g_1 f$ とする. $b \in B$ を任意にとり, $g_0(b) = g_1(b)$ なら良い. f が上への写像なので, ある $a \in A$ が存在して $f(a) = b$. このとき, $g_0(b) = g_0 f(a) = g_1 f(a) = g_1(b)$. □

(A.7) (7.11) の解答.

$g : \mathbb{Q} \to R$ が $\underline{\mathrm{Rng}}$ の射とする. $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ に対して, $g(\alpha)g(\alpha^{-1}) = g(\alpha\alpha^{-1}) = g(1) = 1$. 同様に $g(\alpha^{-1})g(\alpha) = 1$. よって $g(\alpha^{-1}) = g(\alpha)^{-1}$. よって, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ に対して, $g(n/m) = g(n \cdot m^{-1}) = g(n)g(m)^{-1}$.

そこで, g' も $\mathbb{Q}$ から R への $\underline{\mathrm{Rng}}$ の射で, $gi = g'i$ とすると, $g(n/m) = (gi)(n)(gi)(m)^{-1} = (g'i)(n)(g'i)(m)^{-1} = g'(n/m)$. よって $g = g'$. これは i が全射であることを示す. $\square$

(A.8) (7.12) の解答.

集合の射として全射である, つまり surjective map であることが, R 加群の準同型が $R\,\mathrm{Mod}$ の全射になるための必要十分条件であることを示す.

十分性は補題 7.10 から明白である. 必要性を示す. $f : M \to N$ が surjective でないとせよ. このとき, $g : N \to \mathrm{Coker}\, f$ を自然な全射, $h : N \to \mathrm{Coker}\, f$ を零射とすると, $gf = 0$, $hf = 0$ であるが, $g \neq h$ である. これは f が $R\,\mathrm{Mod}$ の全射ではないことを示す. $\square$

(A.9) (7.15) の解答.

$F : \underline{\mathrm{Haus}} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Top}}$ を埋入関手とする. $\underline{\mathrm{Haus}}$ は充満部分圏だから F は忠実充満である. $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \hookrightarrow Y$ は自然な埋入とする. f は例 7.8 によって $\underline{\mathrm{Haus}}$ の射としては全射である.

$\mathbf{2} = \{0, 1\}$ には離散位相を入れ, $W = \mathbf{2} \times \mathbb{R}$ には直積位相を与えておく. W に関係 $\sim$ を $(s, x) \sim (t, y)$ とは, $x = y \neq 0$ または $(s, x) = (t, y)$ の事だとして入れると同値関係である. $Z := W/\sim$ は商空間とし, $\pi : W \to Z$ は商写像とする. Z は直線だが, 原点だけは 2 つある, Hausdorff ではない位相空間である. $g_i(x) = (i, x)$ $(i = 0, 1)$ で $g_i : Y \to W$ を定めると, $\pi g_0 f = \pi g_1 f$ であるが, $\pi g_0 \neq \pi g_1$ であり, f は $\underline{\mathrm{Top}}$ の射としては全射ではない. $\square$

(A.10) (7.16) の解答.

(7.16.1) D を任意の $\mathcal{C}$ の対象として, $f_* : \mathcal{C}(D, A) \to \mathcal{C}(D, B)$ および $g_* : \mathcal{C}(D, B) \to \mathcal{C}(D, C)$ は単射である. よって合成 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \mathcal{C}(D, A) \to \mathcal{C}(D, C)$ も単射である. これは $g \circ f$ が単射であることを示す.

(7.16.2) 任意の $D \in \mathcal{C}$ に対して, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \mathcal{C}(D, A) \to \mathcal{C}(D, C)$ が単射だから, $f_* : \mathcal{C}(D, A) \to \mathcal{C}(D, B)$ も単射で, f は単射.

(7.16.3) f が同型なので, f^{-1} が存在して, これも同型. 特に f^{-1} は単射. 従って, $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ も (7.16.1) によって単射である.

(7.16.4), (7.16.5), (7.16.6) はそれぞれ (7.16.1), (7.16.2), (7.16.3) の双対な主張に過ぎない. $\square$

(A.11) (7.18) の解答.

証明. もし i が分裂単射だとすると, ある $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ が存在して, $gi = 1_{\mathbb{Z}}$. このとき $gi(1) = 1$. そこで $s = i(1)/2$ とおくと, $2g(s) = g(2s) = 1$. そのような整数 $g(s)$ は存在しないから矛盾である. $\square$

(A.12) (7.19) の解答.

十分性. $g: M \to N$ を, 直和分解 $M = N \oplus L$ に関する射影, つまり $g(n+l) = n$ ($n \in N$, $l \in L$) で定まる R 線型写像とすれば, $gi = 1_N$.

必要性. $g: M \to N$ を $gi = 1_N$ をみたす R 線型写像とし, $L = \operatorname{Ker} g$ とおく. $m \in M$ ならば, $m = igm + (1-ig)m$. $igm \in N$ だし, $g(1-ig)m = (g-gig)m = (g-g)m = 0$ なので $(1-ig)m \in \operatorname{Ker} g = L$. よって $M = N+L$. 一方 $in \in N \cap L$ とすると, $n = gin = 0$. よって $in = 0$. これは $N \cap L = 0$ を示す. よって和 $N+L$ は直和であり, $M = N \oplus L$. □

(A.13) (7.21) の解答.

証明. $i: S^1 \hookrightarrow B^2$ を包含写像とする. 問題のような $\varphi: B^2 \to S^1$ がもしあったとすると $\varphi i = 1_{S^1}$ だから φ は分裂全射である. よって関手 $H_1(?;\mathbb{Z})$ を作用させて, $\varphi_*: H_1(B^2,\mathbb{Z}) \to H_1(S^1,\mathbb{Z})$ も分裂全射. これは $H_1(B^2,\mathbb{Z}) = 0$, $H_1(S^1,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ に反して矛盾である. □

(A.14) (7.25) の解答.

証明. (7.25.1). $h: C \to B$ を $hg = 1_B$ である射, $k: B \to A$ を $kf = 1_A$ である射とすると, $(kh)(gf) = k(hg)f = kf = 1_A$. よって gf は分裂単射.

(7.25.2). $h: C \to A$ を $h(gf) = 1_A$ である射とすると, $(hg)f = 1_A$. よって f は分裂単射.

(7.25.3). $g \circ f$ が分裂単射だから (7.25.2) によって f は分裂単射だった. f がさらに全射でもあるので, 補題 7.24 によって f は同型である. $g \circ f$ と f^{-1} が分裂単射だから, (7.25.1) によって, $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ も分裂単射.

(7.25.4), (7.25.5), (7.25.6) は以上の双対な言明に過ぎない. □

(A.15) (7.26) の解答.

証明. (7.26.1). C を任意の $\mathcal{C}$ の対象として, 図式 (7.3.1) は可換である. 今縦の矢 F が仮定により全単射なので, すべての C について f_* が全射であることと, すべての C について $F(f)_*$ が全射であることは同値である. 補題 7.22 によって, f が分裂全射であることと, Ff が分裂全射であることは同値である.

(7.26.2) は (7.26.1) の双対な言明である. (7.26.3) は (7.26.1) と (7.26.2) から明らかである. □

(A.16)　(8.13) の解答.

十分性. $\tau : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ を $\tau_c = (\sigma_c)^{-1}$ で定義する. すると, 各射 $f : c \to c'$ に対して,

$$\begin{tikzcd} Gc \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "Gf"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(a)}"] & Fc \arrow[r, "\sigma_c"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(b)}"] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Gc' \arrow[r, "\tau_{c'}"] & Fc' \arrow[r, "\sigma_{c'}"] & Gc' \end{tikzcd}$$

を考えると, (b) は σ が自然変換だから可換. (a)+(b) は τ の定義から明らかに可換. $\sigma_{c'}$ は単射だから, (a) も可換である. つまり, τ は自然変換である. ひとたび τ が自然変換になれば, $\tau \bullet \sigma = 1_F$, $\sigma \bullet \tau = 1_G$ は明らかだろう. よって τ は σ の逆である.

必要性. τ が σ の逆とすると, $\tau_c \sigma_c = (\tau \bullet \sigma)_c = (1_F)_c = 1_{Fc}$. $\sigma_c \tau_c = (\sigma \bullet \tau)_c = (1_G)_c = 1_{Gc}$. よって $\tau_c = (\sigma_c)^{-1}$ であり, σ_c は同型である. 最後の主張も示された. □

(A.17)　(8.23) の解答.

証明. 関手について $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$ であることは既に見た (6.8).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F_1"] \arrow[r, shift right, "F_2"'] & \mathcal{D} \arrow[r, shift left, "G_1"] \arrow[r, shift right, "G_2"'] & \mathcal{E} \arrow[r, shift left, "H_1"] \arrow[r, shift right, "H_2"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

が関手の列, $\sigma : F_1 \to F_2$, $\tau : G_1 \to G_2$, $\theta : H_1 \to H_2$ が自然変換とする. このとき $(\theta \circ \tau) \circ \sigma$ も, $\theta \circ (\tau \circ \sigma)$ を示したいが, まず, $(H_1 \tau) F_2 = H_1 (\tau F_2)$ を調べる. これはどちらも $c \in \mathcal{C}$ 上で $H_1(\tau(F_2 c))$ になっているから, 明らか. この両者を単に $H_1 \tau F_2$ と表すことにする.

すると, $(\theta \circ \tau) \circ \sigma$ も, $\theta \circ (\tau \circ \sigma)$ も

$$H_1 G_1 F_1 \xrightarrow{H_1 G_1 \sigma} H_1 G_1 F_2 \xrightarrow{H_1 \tau F_2} H_1 G_2 F_2 \xrightarrow{\theta G_2 F_2} H_2 G_2 F_2$$

の合成であるから, 一致する. 以上により, $\circ(\circ, 1) = \circ(1, \circ)$ が示された.

次の主張は, $F \in \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ に対して, $F \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} = F$, $F, F' \in \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ と $\sigma : F \to F'$ に対して, $\sigma \circ 1_{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}} = \sigma$ の 2 点に他ならない. $F \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} = F$ は明らかだろう. $(\sigma \circ 1_{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}})_c = ((F' 1_{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}})(\sigma \, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}))_c = (F' 1_{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}}) \circ \sigma_c = \sigma_c$ だから $\sigma \circ 1_{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}} = \sigma$.

同様に, 最後の主張も証明される. □

(A.18) (8.31) の解答.

まず, $\mathfrak{D}$ が自然変換であることを証明する. そのためにまず M が R 加群のときに $\mathfrak{D}_M : M \to FFM$ が R 準同型でなければならない. $r, r' \in R$, $m, m' \in M$, $\varphi \in FM$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_M(rm + r'm')(\varphi) &= \varphi(rm + r'm') = r\varphi(m) + r'\varphi(m') \\ &= r(\mathfrak{D}_M(m)(\varphi)) + r'(\mathfrak{D}_M(m')(\varphi)) = (r\mathfrak{D}_M(m) + r'\mathfrak{D}_M(m'))(\varphi).\end{aligned}$$

よって $\mathfrak{D}_M(rm + r'm') = r\mathfrak{D}_M(m) + r'\mathfrak{D}_M(m')$ であり, $\mathfrak{D}_M$ は R 準同型であると分かった.

次に, $\varphi : M \to M'$ が R 準同型のとき, 図式

(A.18.1)
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mathfrak{D}_M"] \arrow[d, "\varphi"] & FFM \arrow[d, "FF\varphi"] \\ M' \arrow[r, "\mathfrak{D}_{M'}"] & FFM' \end{tikzcd}$$

が可換であることをいえば, $\mathfrak{D}$ が自然変換と分かる. $((FF\varphi)(h))(\psi) = h(\psi\varphi)$ $(h \in FFM, \psi \in FM')$ であることに注意せよ. すると,

$$((FF\varphi)(\mathfrak{D}_M(m)))(\psi) = \mathfrak{D}_M(m)(\psi\varphi) = \psi\varphi(m).$$

一方,

$$(\mathfrak{D}_{M'}\varphi(m))(\psi) = \psi\varphi(m).$$

よって (A.18.1) は可換であり, $\mathfrak{D}_M$ は自然変換である.

最後に, R が体で, M が有限次元ベクトル空間のとき,

$$\mathfrak{D}_M : M \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R)$$

が同型であることを示す. M が n 次元なら, $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R)$ も n 次元なので, 単射であることを示せば十分である. $m \in M \setminus \{0\}$ とすると, $m = m_1$ を延長して M の基底 $m_1, \ldots, m_n$ を得る. $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ を $\varphi(m_i) = \delta_{1,i}$ として定義できる. ここに $\delta_{1,i}$ は Kronecker のデルタである. すると, $\mathfrak{D}_M(m)(\varphi) = \varphi(m) = 1 \neq 0$. よって $\mathfrak{D}_M(m) \neq 0$ である. 従って $\mathfrak{D}_M$ は単射であり, 同型であることが示された. □

(A.19) (9.10) の解答.

集合 X に対して, $F(X)$ を, X を変数の集合に持つ $\mathbb{Z}$ 上の多項式環 $\mathbb{Z}[x \mid x \in X]$ としたものである. □

(A.20) (9.13) の解答.

証明. 自然同型 $\rho : \underline{\mathrm{Qv}}(Q, \mathrm{Quiver}(\mathcal{C})) \to \underline{\mathrm{Cat}}(\mathrm{Free}(Q), \mathcal{C})$ を構成する. $F \in \underline{\mathrm{Qv}}(Q, \mathrm{Quiver}(\mathcal{C}))$ とせよ. このとき, $\rho(F)_0 : \mathrm{Ob}(\mathrm{Free}(Q)) = Q_0 \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Quiver}(\mathcal{C})_0$ は, F_0 の事だとして定義する. 次に, $\rho(F)_1 : \mathrm{Mor}(\mathrm{Free}(Q)) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ は,

$$\rho(F)_1(n; f_1, \ldots, f_n) = F(f_1) \circ \cdots \circ F(f_n)$$

のことだとして定義する $(n \geq 1)$. また, $\rho(F)_1(0; v) = 1_{F_0 v}$ と定めておく. 定義により, 恒等写像は恒等写像にうつる. また, $s(f_n) = t(g_1)$ のとき,

$$\begin{aligned}
\rho(F)_1((n; f_1, \ldots, f_n) \circ (m; g_1, \ldots, g_m)) &= \rho(F)_1(n+m; f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m) \\
&= F(f_1) \circ \cdots \circ F(f_n) \circ F(g_1) \circ \cdots \circ F(g_m) \\
&= (\rho(F)_1(n; f_1, \ldots, f_n)) \circ (\rho(F)_1(m; g_1, \ldots, g_m)).
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
\rho(F)_1(0; t(f_1)) \circ \rho(F)_1(n; f_1, \ldots, f_n) &= \rho(F)_1(n; f_1, \ldots, f_n) \\
&= \rho(F)_1(n; f_1, \ldots, f_n) \rho(F)_1(0; s(f_n))
\end{aligned}$$

も定義から明らかで, $\rho(F) = (\mathrm{Free}(Q), \mathcal{C}, \rho(F)_0, \rho(F)_1)$ は関手である.

ρ の逆写像 $\pi : \underline{\mathrm{Cat}}(\mathrm{Free}(Q), \mathcal{C}) \to \underline{\mathrm{Qv}}(Q, \mathrm{Quiver}(\mathcal{C}))$ を構成しよう. $G \in \underline{\mathrm{Cat}}(\mathrm{Free}(Q), \mathcal{C})$ とする. $\pi(G)_0 : Q_0 \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を, $\pi(G)_0(v) = G_0(v)$ で定める. また, $\pi(G)_1(f) = G_1(1; f)$ で定める. これで $\pi(G) = (Q, \mathrm{Quiver}(\mathcal{C}), \pi(G)_0, \pi(G)_1)$ が箙の射であることはたやすい. π が ρ の逆写像であること, π が自然変換であることは各自確かめよ. $\square$

(A.21) (9.15) の解答.

可換環 R に対して, 一意的に準同型 $u_R : \mathbb{Z} \to R$ が入る. 積閉集合 $S = u_R(\{1, 2, \ldots\})$ による局所化 R_S を $F(R)$ と定める. F が関手になって, i の左随伴であることは, 局所化の普遍性から明らかであろう. なお, テンソル積を知っている人は, $F = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} ?$ でも正解である.

$F(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ は $3 = 0$ に逆元を与えるから, 零環である. $\square$

(A.22) (10.7) の解答.

(10.7.1), (10.7.2), (10.7.3). $\sigma : F \to F'$ を自然同型とする. $a, b \in \mathcal{C}$ について,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a, b) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "F'"] & \mathcal{D}(Fa, Fb) \arrow[d, "\mathcal{D}(Fa, \sigma_b)"] \\
\mathcal{D}(F'a, F'b) \arrow[r, "\mathcal{D}(\sigma_a, F'b)"] & \mathcal{D}(Fa, F'b)
\end{tikzcd}$$

は可換図式である．実際, $f \in \mathcal{C}(a,b)$ に対して $\sigma_b \circ Ff = F'f \circ \sigma_a$ である．(10.7.1) は, F' が忠実とすると, F' と $\mathcal{D}(\sigma_a, F'b)$ が単射だから, $F : \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Fa, Fb)$ は単射．これは F が忠実であることを示す．(10.7.2) は, F' が充満とすると, F' と $\mathcal{D}(\sigma_a, F'b)$ が全射で $\mathcal{D}(Fa, \sigma_b)$ が全単射だから $F : \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Fa, Fb)$ は全射．これは F の充満性を示す．次に (10.7.3) を示す．d が $\mathcal{D}$ の任意の対象として, $F'c \cong d$ となる $c \in \mathcal{C}$ がある．すると $d \cong F'c \cong Fc$. よって F は同型稠密.

(10.7.4). $a, b \in \mathcal{C}$ に対して, $F : \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Fa, Fb)$ と $G : \mathcal{D}(Fa, Fb) \to \mathcal{E}(GFa, GFb)$ は忠実性によって単射．よってその合成 $GF : \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{E}(GFa, GFb)$ も単射であり, GF は忠実．単射を全射に置き換えて同様の議論をすると (10.7.7) も従う．また, GF が全射, G が全単射なら F が全射だから (10.7.9) も従う．

(10.7.5) 逆に $GF : \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{E}(GFa, GFb)$ が単射ならば, $F : \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Fa, Fb)$ は単射である．

F が同型稠密とし, $c, d \in \mathcal{D}$ とする．F の同型稠密性により, ある $a, b \in \mathcal{C}$ と同型 $h : Fa \to c$ と $g : Fb \to d$ が存在する．図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "GF"] & \mathcal{D}(Fa, Fb) \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\mathcal{D}(h^{-1}, g)", "\cong"'] & \mathcal{E}(GFa, GFb) \arrow[d, "\mathcal{E}(Gh^{-1}, Gg)", "\cong"'] \\
& \mathcal{D}(c, d) \arrow[r, "G"] & \mathcal{E}(Gc, Gd)
\end{tikzcd}$$

は可換である．(10.7.6) を示す．GF が単射で F が全単射だから $G : \mathcal{D}(Fa, Fb) \to \mathcal{E}(GFa, GFb)$ は単射．よって $G : \mathcal{D}(c,d) \to \mathcal{E}(Gc, Gd)$ も単射であり, G は忠実である．(10.7.8) を示す．GF が全射だから $G : \mathcal{D}(Fa, Fb) \to \mathcal{E}(GFa, GFb)$ は全射．よって $G : \mathcal{D}(c,d) \to \mathcal{E}(Gc, Gd)$ も全射であり, G は充満.

(10.7.10) $c \in \mathcal{C}$ とすると, $c \cong \mathrm{Id}\, c$ なので, Id は同型稠密．また, $\mathrm{Id} : \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,b)$ は恒等写像だから全単射であり, Id は忠実充満.

(10.7.11). $e \in \mathcal{E}$ とする．G が同型稠密なので, ある $d \in \mathcal{D}$ があって $Gd \cong e$. 一方, F も同型稠密なので, ある $c \in \mathcal{C}$ があって $Fc \cong d$. このとき, $GFc \cong Gd \cong e$. よって GF は同型稠密.

(10.7.12). $e \in \mathcal{E}$ とする．$G \circ F$ が同型稠密なので, $GFc \cong e$ となる $c \in C$ がある．これは $G(Fc) \cong e$ なので, G が同型稠密なことを示す． □

(A.23) (10.9) の解答.

証明.

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

の合成が 1_F だから, 逆をとって,

$$F \xrightarrow{\varepsilon^{-1}F} FGF \xrightarrow{F\eta^{-1}} F$$

の合成も 1_F になる. また,

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$$

の合成が 1_G だから, 逆をとって,

$$G \xrightarrow{G\varepsilon^{-1}} GFG \xrightarrow{\eta^{-1}G} G$$

の合成も 1_G になる.

以上により, $(G, F, \varepsilon^{-1}, \eta^{-1})$ は随伴である. これが随伴同値であることは明らかである. $\square$

(A.24) (10.18) の解答.

(10.18.1). 空集合と P 全体が P のイデアルであることは明らかであろう. I, J が P のイデアルとする. $x \in I \cap J$, $y \leq x$ とする. $x \in I$ なので, $y \leq x$ により $y \in I$ である. $x \in J$ なので, $y \leq x$ により $y \in J$ である. よって $y \in I \cap J$ であり, $I \cap J$ はイデアルである. 次に, (I_λ) が P のイデアルの族とし, $x \in \bigcup_\lambda I_\lambda$, $y \leq x$ とする. ある λ に対して, $x \in I_\lambda$ で $y \leq x$ だから, $y \in I_\lambda$. よって $y \in \bigcup_\lambda I_\lambda$ であり, $\bigcup_\lambda I_\lambda$ はイデアルである. 以上により, P のイデアルの全体は, 開集合の公理をみたし, P の位相を定める.

(10.18.2). $x \in f^{-1}(J)$, $y \leq x$ とせよ. $f(y) \leq f(x) \in J$ だから, $f(y) \in J$. よって $y \in f^{-1}(J)$ となり, $f^{-1}(J)$ は P のイデアルである.

(10.18.3). これは, $P, Q \in \underline{\text{POrd}}$ に対して, $f : P \to Q$ が擬順序を保つことと, f が上記で導入した位相に関して連続であることが同値であることを示すことに他ならない. f が擬順序を保てば, f が連続なことは (10.18.2) で証明した.

f が連続ならば, f が擬順序を保つことを示そう. $x, y \in P$, $x \leq y$ とする.

$$J = \{z \in Q \mid z \leq f(y)\}$$

とおくと, J は Q のイデアルである. $f(y) \in J$ なので, $y \in f^{-1}(J)$ である. f の連続性によって $f^{-1}(J)$ もイデアルだから, $x \leq y$ によって $x \in f^{-1}(J)$ である. よって $f(x) \in J$. すなわち $f(x) \leq f(y)$ であり, f は擬順序を保つ.

(10.18.4) 位相空間 X の位相がある X の擬順序により与えられているとする．すると, 一点 x の閉包は, x で生成されたフィルター

$$[x, \infty) = \{y \in X \mid y \geq x\}$$

になる．よって, X が T_0 空間であることと, X が順序集合であることは同じで, X が T_1 空間であることと, X が順序集合で全ての X の元が極大, すなわち, X のどの 2 元も比較不可能であることが同値である．ところで, X のどの 2 元も比較不可能であれば, X には離散位相が入る．よって, T_1 空間ではあるが, 離散ではない位相空間は, 擬順序によって位相が与えられた空間と同相ではない．例えば $\mathbb{R}$ は T_1 だが離散ではないので, F は同型稠密ではない．

(10.18.5) 位相空間 X に対して, X に擬順序 $\leq$ を, $x \leq y$ とは, $y \in \bar{x}$ のことである, として定義する．ここに, $\bar{x}$ は $\{x\}$ の閉包である．これで実際に擬順序であることは明白だろう．また, $f : X \to Y$ が連続写像で, $x, x' \in X$, $x \leq x'$ とすると, $x' \in \bar{x}$．よって連続性により, $f(x') \in f(\bar{x}) \subset \overline{f(x)}$．よって $f(x') \geq f(x)$．つまり f はこうして定めた擬順序を保つ．これにより, 関手 $G : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{POrd}}$ が定まる．以上の構成を有限な擬順序集合と有限な位相空間に制限して, $F : \underline{\mathrm{FPOrd}} \to \underline{\mathrm{FTop}}$ と $G : \underline{\mathrm{FTop}} \to \underline{\mathrm{FPOrd}}$ を得る．

P が擬順序集合のとき, $GF(P) = P$, X が有限位相空間のとき, $FG(X) = X$ であることをいえば十分である．

$GF(P)$ は集合としては P である．その擬順序は, $x \leq y$ とは, $F(P)$ の位相により, $y \in \bar{x}$ となることである．ところで, $F(P)$ の位相で $\bar{x} = \{z \in P \mid z \leq x\}$ だから, $y \in \bar{x}$ は P の元の順序で $x \leq y$ と同値．よって $GF(P)$ の擬順序と P の元の擬順序は一致する．

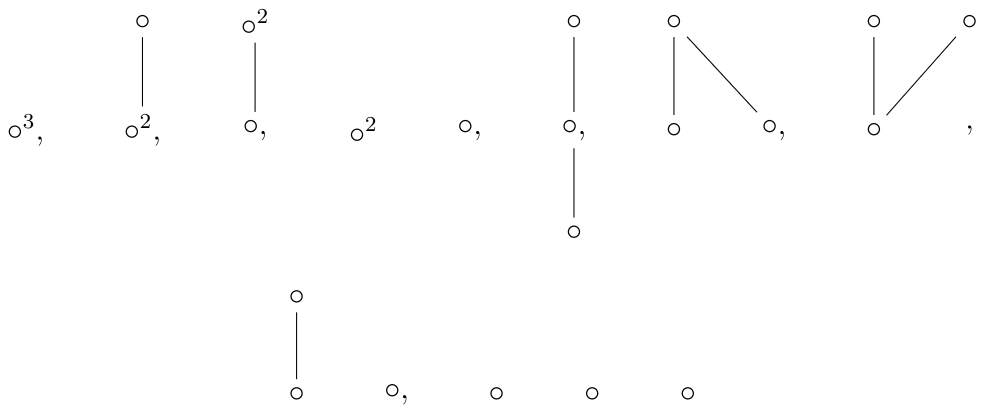
次に, X が有限位相空間とする．$FG(X)$ は集合としては X である．その位相も X のそれと一致することをいうには, X は有限なので, 各点 $x \in X$ に対して, $\bar{x}$ が一致することをいえば十分である．実際, S が X の部分集合のとき, 有限性により, $\bar{S} = \bigcup_{s \in S} \bar{s}$ だから．$FG(X)$ での $\bar{x}$ は $G(X)$ の擬順序での $\{z \in X \mid z \geq x\}$ である．これは G の定義により, 元の X の位相での $\bar{x}$ である．以上により, F は $\underline{\mathrm{FPOrd}}$ から $\underline{\mathrm{FTop}}$ への同値であり, G は準逆である．

(10.18.6) 上の見方により, 有限位相空間と有限擬順序集合を同一視する．このとき, 有限位相空間 X の T_0 化 $\bar{X}$ は擬順序集合 X に付随する順序集合になる．実際, X の T_0 化とは, $x \equiv y$ とは, $x \in \bar{y}$ かつ $y \in \bar{x}$ のことである, として得られる同値関係 $\equiv$ による商空間 (実際に T_0 空間になる) のことであるが, X に付随する順序集合とは, $x \sim y$ とは, $x \geq y$ かつ $y \geq x$ のことである, として定義される同値関係 $\sim$ による商集合 $X/\sim$ に, $\pi(x) \leq \pi(y)$ と

は, $x \leq y$ のことである (ここに $\pi : X \to X/\sim$ は射影), として擬順序を入れた擬順序集合 (実際に順序集合にもなる) のことである.

X が 3 点からなる位相空間のとき, $\bar{X}$ は高々 3 点からなる空ではない順序集合である. 逆に, $\bar{X}$ を定めれば, $\bar{X}$ の各元 $\bar{x}$ の自然な射 $X \to \bar{X}$ による逆像の濃度 $m(\bar{x})$ を, 適当な 1 以上の整数として, $\sum_{\bar{x}\in\bar{X}} m(\bar{x}) = 3$ となるように定めれば, X が (同相を除いて) 一意的に定まる.

$\bar{X}$ の Hasse 図を描き, 各点 $\bar{x}$ の脇に, $m(\bar{x})$ が 1 ではない場合に限り, $m(\bar{x})$ を書くことにして X を表示すれば,



となり, 9 通りに分類される. □

(A.25) (11.12) の解答.

$f : X \to Y$ が $\underline{\mathrm{Top}}$ の射とするとき, $F : X \times I \to Y$ を $F(x,t) = f(x)$ とおくと, F は f を f につなぐホモトピーである. よって $f \simeq f$ である.

次に $f, g : X \to Y$ が $\underline{\mathrm{Top}}$ の射で $f \simeq g$ とする. すると f を g につなぐホモトピー F が存在する. このとき, $G : X \times I \to Y$ を $G(x,t) = F(x, 1-t)$ とおくと, G は g を f につなぐホモトピーであり, $g \simeq f$ である.

次に $f, g, h : X \to Y$ が $\underline{\mathrm{Top}}$ の射で $f \simeq g$, $g \simeq h$ とする. F を, f を g につなぐホモトピーとし, G を, g を h につなぐホモトピーとする. このとき, $H : X \times I \to Y$ を,

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ G(x, 2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

と定めれば H は f を h につなぐホモトピーである. よって $f \simeq h$ である. 以上により, $\simeq$ は $\mathrm{Mor}(\underline{\mathrm{Top}})$ の同値関係である.

$f \simeq g$ ならば $s(f) = s(g)$, $t(f) = t(g)$ であることは, ホモトープの定義から明白である.

最後に, $h : Z \to X$, $f, g : X \to Y$, $h' : Y \to Z'$ が $\underline{\mathrm{Top}}$ の射で, $f \simeq g$ とする. F が f を g につなぐホモトピーとする. このとき, $G : Z \times I \to Z'$ を $G(z, t) = h'(F(h(z), t))$ と定義すると, G は $h'fh$ を $h'gh$ につなぐホモトピーであり, $h'fh \simeq h'gh$ となる. よって $\simeq$ は $\underline{\mathrm{Top}}$ の合同関係である. □

(A.26) (11.15) の解答.

$f \in C(R)(C, D)$ について, $s^i = 0$ とおくと, $f^i - f^i = 0 = \partial_D^{i-1} \circ 0 + 0 \circ \partial_C^i$. よって $f \simeq f$ である.

次に, $f, g \in C(R)(C, D)$, $f \simeq g$ であり, $s = (s^i)$ が f を g につなぐホモトピーであるとするときに, $t = (t^i)$ を $t^i = -s^i$ で定めると, $g^i - f^i = -(f^i - g^i) = \partial_D^{i-1} \circ t^i + t^{i+1} \circ \partial_C^i$. よって $g \simeq f$ である.

次に, $f, g, h \in C(R)(C, D)$, $f \simeq g$, $g \simeq h$ であり, $s = (s^i)$ が f を g につなぐホモトピー, $t = (t^i)$ が g を h につなぐホモトピーとするときに, $u = (u^i)$ を $u^i = s^i + t^i$ で定めると,

$$f^i - h^i = (f^i - g^i) - (g^i - h^i) = \partial_D^{i-1} \circ u^i + u^{i+1} \circ \partial_C^i.$$

よって, u は f と h をつなぐホモトピーであり, $f \simeq h$. 以上により, $\simeq$ は同値関係である.

$f \simeq g$ ならば, $s(f) = s(g)$, $t(f) = t(g)$ であることは定義による.

また, $h : C' \to C$, $f, g : C \to D$, $h' : D \to D'$ が $C(R)$ の射で, $f \simeq g$ とする. $s = (s^i)$ を f を g につなぐホモトピーとする. このとき, $t = (t^i)$ を $t^i = (h')^{i-1} \circ s^i \circ h^i$ で定義する. すると,

$$h'fh - h'gh = h'(f - g)h = (h')^i(\partial_D^{i-1} s^i + s^{i+1} \partial_C^i)h^i = \partial_{D'}^{i-1} t^i + t^{i+1} \partial_{C'}^i.$$

よって t は $h'fh$ と $h'gh$ をつなぐホモトピーであり, $h'fh \simeq h'gh$. このことは, $\simeq$ が $C(R)$ の合同関係であることを示す. □

(A.27) (12.3) の解答.

$\mathcal{C}$ が零対象 z を持つとする. f を一意的な射 $c \to z$ とし, g を一意的な射 $z \to c'$ とし, $h := g \circ f$ とおけば, h は c から c' への零射であり, c から c' への零射は存在する.

次に一意性を示す. $h_1 : c \to z \to c'$ と, $h_2 : c \to z' \to c'$ が零射とする. このとき, 一意的な射 $m : z \to z'$ が存在し, 図式

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r] \arrow[d] & z' \arrow[d] \\ z \arrow[r] \arrow[ur, "m"] & c' \end{tikzcd}$$

は z' が終対象で z が始対象であることによって可換である．よって $h_1 = h_2$ である．

次に $R\,\mathrm{Mod}$ の零射を記述する．まず, 零加群 0 が $R\,\mathrm{Mod}$ の零対象であることを示す．$M \in R\,\mathrm{Mod}$ のとき, 準同型 $M \to 0$ は, $m \mapsto 0$ しかなく, つまり一意的に存在する．よって 0 は $R\,\mathrm{Mod}$ の終対象である．一方, $M \in R\,\mathrm{Mod}$ のとき, 準同型 $0 \to M$ は $0 \mapsto 0$ しかなく, つまり一意的に存在する．よって 0 は $R\,\mathrm{Mod}$ の始対象である．以上により, 0 は $R\,\mathrm{Mod}$ の零対象であると分かった．$M, N \in R\,\mathrm{Mod}$ について, 零射 $M \to N$ は, $M \to 0 \to N$ と経由させた準同型であり, これは $m \mapsto 0$ に他ならない．つまり, 零写像 $M \to N$ が零射である． □

(A.28) (12.14) の解答.

Λ が小さい集合, $F : \Lambda \to \underline{\mathrm{Top}}$ が関手とする．集合 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} F\lambda = \bigcup_\lambda \{\lambda\} \times F\lambda$ に位相を,

$$\{\{\lambda\} \times U \mid \lambda \in \Lambda,\ U \text{ は } F\lambda \text{ の開集合}\}$$

が開基であるように入れる．構成から, $\coprod_\lambda F\lambda \in \underline{\mathrm{Top}}$ である．

$u_\lambda : F\lambda \to \coprod_\lambda F\lambda$ は $u_\lambda(x) = (\lambda, x)$ で与える．容易に分かるように, $U \subset \coprod_\lambda F\lambda$ が開集合であるための必要十分条件はすべての λ について $u_\lambda^{-1}(U)$ が $F\lambda$ の開集合であることである．特に各 u_λ は連続である．

また, X が $\underline{\mathrm{Top}}$ の対象で, $v : F \to X$ が錐のとき, $h : \coprod_\lambda F\lambda \to X$ を $h(\lambda, a) = v_\lambda(a)$ $(\lambda \in \Lambda,\ a \in F\lambda)$ で定めると, 任意の λ に対して $h \circ u_\lambda = v_\lambda$ であることは明白．また, そのような h が一意的であることも明らかである．また, 任意の X の開集合 V と λ に対して, $u_\lambda^{-1}(h^{-1}(V)) = v_\lambda^{-1}(V)$ は開集合．よって $h^{-1}(V)$ は開集合．よって h は連続である．以上により, $\langle \coprod_\lambda F\lambda, u \rangle$ は F の余積である． □

(A.29) (12.20) の解答．$R\,\mathrm{Mod}$ の零射とは, 加群 0 を経由する準同型, すなわち, すべての元を 0 に写す写像に他ならない．$g : M \to N$ を零射とする．L を $R\,\mathrm{Mod}$ の対象, $v : N \to L$ を, $vf = vg$ である準同型とする．$vg = 0$ だから, $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, v$．よって, 準同型定理によって, ある $h : N/\mathrm{Im}\, f \to L$ で $hu = v$ であるものが一意的に存在する．これが示すべき事であった． □

(A.30) (12.27) の解答.

$M_1 \xleftarrow{u_1} L \xrightarrow{u_2} M_2$ が与えられたときに, $(v_1, v_2) : M_1 \oplus M_2 \to N$ を $\mathrm{Coker}\begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$ と定めれば, (12.27.1) が押し出し図式になることを言えば, (12.27.3)⇒(12.27.2) は無論のこと, 押し出しの一意性によって, (12.27.2)⇒(12.27.3) も容易に従う．

ここで,

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"] & M_1 \arrow[d, "v'_1"] \\ M_2 \arrow[r, "v'_2"] & N' \end{tikzcd}$$

を可換図式とする. すると $(v'_1, v'_2) \circ \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} = v'_1 u_1 - v'_2 u_2 = 0$ であるから, 余核の普遍性により, ある $h : N \to N'$ であって, $h(v_1, v_2) = (v'_1, v'_2)$ であるものが一意的に存在する. これは (12.27.1) が押し出し図式であることを示す. $\square$

(A.31) (12.35) の解答. $F : I \to \underline{\mathrm{Grp}}$ を関手とする. $\tau : X \to UF$ を極限錐とする.

まず, $\underline{\mathrm{Set}}$ の極限の記述により, $p_i h = \tau_i$ で決まる一意的な射 $h : X \to \prod_{i \in I} UFi$ は単射である. ここに p_i は射影. $(x_i) \in \mathrm{Im}\, h$ となる条件は, すべての $u : i \to j$ について, $(UFu)(x_i) = x_j$ である. 各 τ_i が群準同型であるように X に群構造をいれるには, $\tau_i(gg') = \tau_i(g)\tau_i(g')$ をみたさせねばならない. これは $h(gg') = (\tau_i(g)\tau_i(g'))_{i \in I} \in \prod_i UFi$ と同値で, h が単射だから X の群構造は存在したとしても一意的. ところで, $u : i \to j$ について,

$$(UFu)(\tau_i(g)\tau_i(g')) = U(Fu\tau_i(g) \cdot Fu\tau_i(g')) = \tau_j(g)\tau_j(g')$$

だから, $\tau_i(gg') = \tau_i(g)\tau_i(g')$ をみたすように X に一意的に積が入った. X には, $\tau_i(e) = e_i$, ただし, e_i は Fi の単位元, となる元 e が一意的に存在する. 実際, $(UFu)(e_i) = e_j$ だから. また, $\tau_i((gg')g'') = \tau_i(g)\tau_i(g')\tau_i(g'') = \tau_i(g(g'g''))$ なので, $(gg')g'' = g(g'g'')$. また, $g \in X$ について, $\tau_i(g') = \tau_i(g)^{-1}$ をみたす g' が存在する. 実際, $(Fu)(\tau_i(g)) = \tau_j(g)$ で, Fu は群準同型だから, $(Fu)(\tau_i(g)^{-1}) = \tau_j(g)^{-1}$. g' が g の逆元になることは明白である. 以上により, X には, 各 τ_i が群準同型となる群構造が一意的に入ることが分かった.

最後に, このようにして作った群 X と群準同型 $\tau_i : X \to Fi$ によって, $\tau : X \to F$ が極限錐になることを示す. $\tau' : G \to F$ が錐とせよ. すべての i について $\tau_i \rho(g) = \tau'_i(g)$ となるような写像 $\rho : G \to X$ は一意的に存在する. 何故なら X は $\underline{\mathrm{Set}}$ での UF の極限だったから. ところで,

$$\tau_i(\rho(gg')) = \tau'_i(gg') = \tau'_i(g)\tau'_i(g') = \tau_i(\rho(g))\tau_i(\rho(g')) = \tau_i(\rho(g)\rho(g'))$$

がすべての i についていえるので, $\rho(gg') = \rho(g)\rho(g')$. つまり ρ は群準同型でもあり, $\tau : X \to F$ が $\underline{\mathrm{Grp}}$ で極限錐になっていることがわかった.

I が小さいと, $\underline{\mathrm{Set}}$ において, 極限錐 $\tau : X \to F$ が存在するから, 上の構成で, これを $\underline{\mathrm{Grp}}$ での極限錐にすることができ, $\underline{\mathrm{Grp}}$ は任意の小極限を持って小完備である. $\square$

(A.32) (12.45) の解答.

$g : M \to N$ は f の余核である. これは余極限の一種なので, 左随伴である $? \otimes_R T$ (右随伴は $\mathrm{Hom}_R(T, ?)$) は, 余核を保ち, $g \otimes 1 : M \otimes_R T \to N \otimes_R T$ は $f \otimes 1$ の余核である. これは与えられた列の完全性を示す. $\square$

(A.33) (13.7) の解答.

(13.7.1)⇒(13.7.2). 擬 $\mathcal{U}$ 圏になることは知っている. $\mathcal{U}$ 圏 $\mathcal{C}$ について, $\#(\mathrm{Ob}(\mathcal{C})/\cong) \leq \#\,\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \leq \#\,\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \leq \#\mathcal{U}$. 対象の同型類の全体の濃度は同値で保たれるから, $\mathcal{C}$ が $\mathcal{U}$ 圏と同値な時にも $\#(\mathrm{Ob}(\mathcal{C})/\cong) \leq \#\mathcal{U}$.

(13.7.2)⇒(13.7.1). $\mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の適当な骨格で置き換えて良く, $\mathcal{C}$ ははじめから骨格的として良い. $\Lambda \subset \mathcal{U}$, $F_0 : \Lambda \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を全単射とする. 各 $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して, $H(\lambda, \mu) \in \mathcal{U}$, $g(\lambda, \mu) : H(\lambda, \mu) \to \mathcal{C}(F_0(\lambda), F_0(\mu))$ を全単射とする.

$M = \coprod_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Lambda} H(\lambda, \mu)$ とおく. $M \subset \mathcal{U}$ である. 実際, M の元は $((\lambda, \mu), a)$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$, $a \in H(\lambda, \mu)$) の形をしており, λ, μ, a は小さいので $((\lambda, \mu), a)$ も小さく, $M \subset \mathcal{U}$. また, $F_1 : M \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ を $F_1((\lambda, \mu), a) = g(\lambda, \mu)(a)$ で定めると, 全単射である.

$\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = \Lambda$, $\mathrm{Mor}(\mathcal{D}) = M$ で, $F = (F_0, F_1) : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が圏の同型となるように圏 $\mathcal{D}$ を定めることができる. 実際, $s((\lambda, \mu), a) = \lambda$, $t((\lambda, \mu), a) = \mu$ とし, $\mathcal{D}$ での合成は $f \circ g = F_1^{-1}(F_1(f) \circ F_1(g))$ で定めれば良い.

$\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して, $\mathcal{D}(\lambda, \mu) = \{(\lambda, \mu)\} \times H(\lambda, \mu)$ は小さい集合の直積だから小さく, $\mathcal{D}$ は $\mathcal{U}$ 圏である. よって $\mathcal{C}$ は $\mathcal{U}$ 圏と同値である. $\square$

(A.34) (13.8) の解答.

$\mathcal{C}^I$ について, (13.7.2) の条件をチェックする.

まず, $F, G \in \mathcal{C}^I$ について, $h(F, G) : \mathrm{Nat}(F, G) \to \prod_{i\in I} \mathcal{C}(Fi, Gi)$ を $h(F, G)(\sigma) = (\sigma_i)_{i\in I}$ で定義すれば, 単射である. $\prod_{i\in I} \mathcal{C}(Fi, Gi)$ は各 $\mathcal{C}(Fi, Gi)$ が小さく, $\mathrm{Ob}(I)$ も小さいから小さく, 従って $\mathrm{Im}\, h(F, G)$ も小さく, $\mathrm{Nat}(F, G)$ は小さい集合と対等である. つまり $\mathcal{C}^I$ は擬 $\mathcal{U}$ 圏である.

次に $\#(\mathcal{C}^I) \leq \mathcal{U}$ を示す. $\#(\mathcal{C}^I) \leq \#\,\mathrm{Map}(\mathrm{Mor}(I), \mathrm{Mor}(\mathcal{C}))$ なので (F_1 が決まれば関手 F は決まる. $F_0(i) = sF_1(1_i)$ だから), $\#\,\mathrm{Map}(\mathrm{Mor}(I), \mathrm{Mor}(\mathcal{C})) \leq \#\mathcal{U}$ をいえば良い. $\mathcal{C}$ は $\mathcal{U}$ 圏なので, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{U}$. また, $\mathrm{Mor}(I)$ は小さい.

よって, 小さい集合 J と, $M \subset \mathcal{U}$ について, $\#\,\mathrm{Map}(J, M) \leq \#\mathcal{U}$ ならば良い. 明らかに $M = \mathcal{U}$ として良い. まず, J から J への写像の全体 $\mathrm{Map}(J, J)$ を S とおく. これは小さい. 次に, 濃度が $\#J$ 以下である $\mathcal{U}$ の部分集合全体を N とする. $x \in N$ なら, $x \subset \mathcal{U}$ で, 全射 $J \to x$ が存在するから (2.6.7)

によって $x \in \mathcal{U}$. つまり $N \subset \mathcal{U}$ である. $\mathrm{Map}(J,\mathcal{U})$ から N への写像 Φ を $\Phi(f) = f(J)$ で定める. 選択公理によって, $\Psi : N \to \mathrm{Map}(J,\mathcal{U})$ であって, $\Phi\Psi = 1_N$ であるような写像 Ψ が存在する. $h : S \times N \to \mathrm{Map}(J,\mathcal{U})$ を $h(s,n) = \Psi(n) \circ s$ で定める. h が全射であることは容易である. $\#S \leq \#\mathcal{U}$, $\#N \leq \#\mathcal{U}$ で $\mathcal{U}$ は無限だから, $\#(S \times N) \leq \#\mathcal{U}$. よって $\#\,\mathrm{Map}(J,\mathcal{U}) \leq \#\mathcal{U}$ である. これが示すべき事であった. □

(A.35) (13.28) の解答.

X $(= \eta(X))$ で生成される FX の部分群を G とする. すると, $\eta : X \to FX$ は

$$X \xrightarrow{\xi} G \xrightarrow{\iota} FX$$

と一意的に分解する. ここに $\iota : G \to FX$ は埋入である. ι が同型であることを示せばよい. そのためには, 普遍射の一意性により, $\xi : X \to G = UG$ が忘却関手 U への普遍射であることをいえば十分である. よって $H \in \underline{\mathrm{Grp}}$, $f : X \to H$ を写像とする. このとき, FX の普遍性により, $h\eta = f$ となる群準同型 $h : FX \to H$ が存在する. $(h\iota)\xi = f$ だから, $h'\xi = f$ となる群準同型 $h' : G \to H$ が存在する. ところで, このような h' は, $h'(\xi(x)) = f(x)$ によって, 各 $\xi(x)$ $(x \in X)$ の h' によって写るべき先が指定されていて, G はその定義によって $\xi(X)$ で生成されるので, 一意的である. よって $\xi : X \to G$ は普遍射である. □

(A.36) (13.29) の解答.

I および $\mathcal{C}$ を小さくしてしまう十分大きい宇宙を取り ((2.7) 参照), それを $\mathcal{U}$ とすることで, I も $\mathcal{C}$ も小さいとして良い. $c \in \mathcal{C}$ を任意として, $\mathcal{C}(c, \varprojlim F) \to \mathcal{C}(c, \varprojlim G)$ が単射ならば良い. 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c, \varprojlim F) \arrow[r, "\mathcal{C}(c, \varprojlim \sigma)"] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{C}(c, \varprojlim G) \arrow[d, "\cong"] \\
\varprojlim \mathcal{C}(c, F-) \arrow[r, "\varprojlim \mathcal{C}(c,\sigma)"] & \varprojlim \mathcal{C}(c, G-)
\end{tikzcd}$$

は可換なので, F を $\mathcal{C}(c, F-)$ で, G を $\mathcal{C}(c, G-)$ で, σ を $\mathcal{C}(c,\sigma)$ で置き換えて, はじめから $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Set}}$ として良い.

$\underline{\mathrm{Set}}$ における極限は,

$$\varprojlim F = \{(x_i) \in \prod_{i \in I} Fi \mid \forall u\ (Fu)(x_{su}) = x_{tu}\}$$

と具体的に書ける. $(x_i),(y_i) \in \varprojlim F$, $(\varprojlim \sigma)(x_i) = (\varprojlim \sigma)(y_i)$ とする. つまり, 各 i について, $\sigma_i(x_i) = \sigma_i(y_i)$ である. σ_i が単射なので, $x_i = y_i$. i は任意なので, $(x_i) = (y_i)$. これは $\varprojlim \sigma$ が単射であることを示す. □

(A.37) (13.30) の解答.

$h, h' : d' \to d$ が射で, $H = eh = eh'$ とする. $fH = feh = geh = gH$ である. よって, イコライザの普遍性により, $H = es$ をみたす $s : d' \to d$ が一意的に存在する. h も h' もこの一意的な s の条件をみたしており, $h = s = h'$. □

(A.38) (13.31) の解答.

$h, h' : a' \to a$ が $\mathcal{C}$ の射で, $H := f'h = f'h'$ とする. すると, $fg'h = gf'h = gf'h' = fg'h'$ で f が単射だから $G := g'h = g'h'$. 引き戻しの普遍性により, $s : a' \to a$ で, $f's = H$, $g's = G$ となるものが一意的に存在する. h も h' もこの一意的な s の条件をみたすから, $h = s = h'$. □

(A.39) (14.3) の解答.

$u \equiv v$ とする. このとき, $u = vh$, $v = uh'$ と書ける. $u1_a = u = vh = uh'h$ で u は単射なので, $1_a = h'h$. $v1_b = v = uh' = vhh'$ で v は単射なので, $1_b = hh'$. よって h は同型である. h の一意性は $u = vh$ と v の単射性による.

逆に $u = vh$ で h が同型とすると, $v = uh^{-1}$. □

(A.40) (14.11) の解答.

$j : d \to c$ が単射であり, (u_λ) の上界 (すなわち, どの u_λ も j を経由する) とする. すると h も j を経由する. 像の定義によって, $i \le j$ である. i が (u_λ) の上界であることは容易なので, i は和である. □

(A.41) (14.14) の解答.

十分大きい宇宙を取って考えることにより, $\mathcal{C}$ も $\mathcal{D}$ も小さいとして良い. すると, 関手

$$\prod_{s \in S} \mathcal{C}(Fs, -) \cong (\prod_{s \in S} \mathcal{D}(s, -)) \circ G$$

は忠実関手の合成だから忠実であり, 従って $F(S)$ は生成系である. □

(A.42) (15.27) の解答.

$\sigma : F \to G$ を自然同型とする. $f, f' : a \to a'$ が $\mathcal{A}$ の射, $r, r' \in R$ とすると, 自然性により,

$$\begin{aligned} G(rf + r'f') &= \sigma_{a'} F(rf + r'f')\sigma_a^{-1} = \sigma_{a'}(rF(f) + r'F(f'))\sigma_a^{-1} \\ &= r\sigma_{a'}F(f)\sigma_a^{-1} + r'\sigma_{a'}F(f')\sigma_a^{-1} = rG(f) + r'G(f'). \quad \square \end{aligned}$$

(A.43) (15.33) の解答.

系 14.22 の双対と例 14.24 によって, F は右随伴関手 G を持つ. G は右随伴なので, 連続であり, $G \cong \mathrm{Hom}_R(M, ?)$ となる $M \in R\,\mathrm{Mod}$ がある. すると, F も $? \otimes_R M$ も共に $\mathrm{Hom}_R(M, ?)$ の随伴関手である. 随伴関手の一意性により, $F \cong ? \otimes_R M$ である. □

References

[BB] S. Brenner and M. C. R. Butler, Generalizations of the Bernstein–Gel'fand–Ponomarev reflection functors, *Representation Theory, II* (Ottawa, 1979), pp. 103–169.

[Frk] J. Franke, On the Brown representability theorem for triangulated categories, *Topology* **40** (2001), 667–680.

[Gab] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), 323–448.

[Gro] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* **9** (1957), 119–221.

[Har] R. Hartshorne, *Residues and Duality, Lect. Notes Math.* **20**, Springer Verlag, (1966).

[Har2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math.* **52**, Springer Verlag (1977).

[Hat] 服部晶夫, 「位相幾何学 I」, 岩波 (1977).

[Ivr] B. Iversen, *Cohomology of Sheaves,* Springer (1986).

[Kaw1] 河田敬義, 「ホモロジー代数 I」, 岩波 (1976).

[Kaw] 河田敬義, 「ホモロジー代数 II」, 岩波 (1977).

[McL] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician,* 2nd ed. *Graduate Texts in Math.* **52**, Springer Verlag (1998).

[三高] S. マックレーン著, 三好博之, 高木理訳, 「圏論の基礎」, シュプリンガー (1998), [McL] の邦訳.

[Miy] Y. Miyashita, Tilting modules of finite projective dimension, *Math. Z.* **193** (1986), 113–146.

[Muk] S. Mukai, Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves, *Nagoya Math. J.* **81** (1981), 153–175.

[Nee] A. Neeman, The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 205–236.

[Ric] J. Rickard, Morita theory for derived categories, *J. London Math. Soc.* **39** (1989), 436–456.

[Spl] N. Spaltenstein, Resolutions of unbounded complexes, *Compositio Math.* **65** (1988), 121–154.

[谷堀] 谷崎俊之, 堀田良之, 「D 加群と代数群」, シュプリンガー (1995).

[Wbl] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra,* Cambridge (1994).

Index