Jacques Garrigue, 2023 年 10 月 25 日

判定が不可能な問題

Church-Turing の提唱

あるチューリング機械 M が入力

$$T = \boxed{\mathrm{B}}\boxed{a_{1,j_1}}\boxed{\ldots}\boxed{a_{1,0}}\boxed{\mathrm{M}}\boxed{\ldots}\boxed{\mathrm{M}}\boxed{a_{m,j_m}}\boxed{\ldots}\boxed{a_{m,0}}\boxed{\mathrm{B}}$$

という形の入力に対して必ず

$$T' = \boxed{\mathrm{B}}\boxed{c_{1,k_1}}\boxed{\ldots}\boxed{c_{1,0}}\boxed{\mathrm{M}}\boxed{\ldots}\boxed{\mathrm{M}}\boxed{c_{n,k_n}}\boxed{\ldots}\boxed{a_{n,0}}\boxed{\mathrm{B}}$$

という形の出力を返す: $T \rhd_M (T', n, q')$．なお，各 $a_{i,k}$ と $c_{i,j}$ は 0 か 1 である．

そのとき，M が以下の (0 以外の) 自然数の組の上の関数 f を計算していると言える．

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbf{N}^m & \to & \mathbf{N}^n \\ & (a_1, \ldots, a_m) & \mapsto & (c_1, \ldots, c_n) \end{array}$$

なお，$a_i = 2^{j_i+1} + \sum_{k=0}^{j_i} a_{i,k} 2^k \quad (1 \le i \le m)$, $c_i = 2^{k_i+1} + \sum_{j=0}^{k_i} c_{i,j} 2^k \quad (1 \le i \le n)$.
ここで 2^{j_i+1} を足すのは各自然数の表現を一意的に決めるためである．

逆に，ある関数 $f : \mathbf{N}^m \to \mathbf{N}^n$ がチューリング計算可能であるとは，上のような機械 M が存在すると同義である．

Church-Turing の提唱は任意の関数 $f : \mathbf{N}^m \to \mathbf{N}^n$ について，f が具体的な手続によって計算できることと，f がチューリング計算可能であることが同じであると言っている．

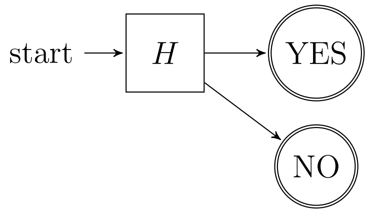
Church-Turing の提唱を認めれば,「f がチューリング計算可能」という必要がなくて，単に「f が計算可能」と言えばいい．

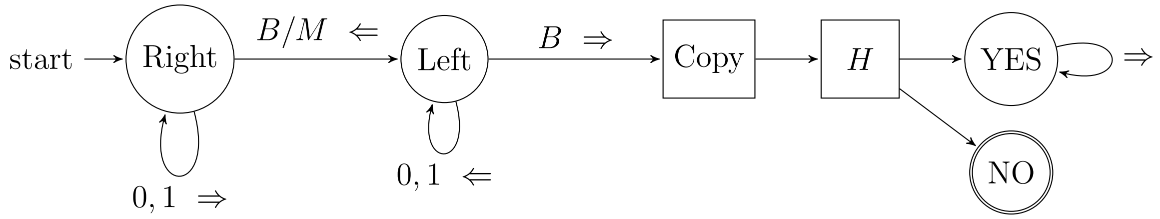
停止問題

チューリング計算可能性の特別な場合として，真偽値を返す関数を考える．あるチューリング機械 M が停止状態 YES と NO のみが用意されて，上のような入力 T に対して，YES か NO で停止する ($T \rhd_M (T', n, \mathrm{YES})$ または $T \rhd_M (T', n, \mathrm{NO})$) と，以下の関数 $p(a_1, \ldots, a_m)$ を定義する．

$$\begin{array}{rccc} p : & \mathbf{N}^m & \to & \{\mathrm{YES}, \mathrm{NO}\} \\ & (a_1, \ldots, a_m) & \mapsto & p(a_1, \ldots, a_m) \end{array}$$

H が停止問題を判定するとは，H があるチューリング機械 M の万能機械 U のための 2 進数表現 $\overline{M}^U$ と 0 と 1 だけのテープ T を与えられると，必ず YES か NO という停止状態で止まり，かつ YES のときは $M(T)$ が止まり (M をテープ T に対して走らせたとき停止状態で止まる)，NO のとき $M(T)$ が止まらない (無限に走り続ける)．





上の図は H を示しているならば，下の図は H^* を示している．まず与えられたチューリング機械の表現をコピーし，次に H を実行し，H が状態 YES で止まれば無限ループに入る．

そこで以下のような関係がなりたつ

$$H^*(\overline{H^*}) \text{が止まる} \Leftrightarrow H'(\overline{H^*}) = \text{NO} \Leftrightarrow H(\overline{H^*}, \overline{H^*}) = \text{NO} \Leftrightarrow H^*(\overline{H^*}) \text{が止まらない}$$

H^* が存在すれば，矛盾が生じる．H の存在を仮定すると H^* が構築できるので，H の存在が否定された．

印字問題

任意の機械 $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して $M' = (K \cup \{q_f\}, \Sigma, \delta', q_0, \{q_f\})$ を構築する (q_f は新しい状態).

$$\begin{array}{ll} \delta'(q, c) = \delta(q, c) & q \in K \setminus F \text{ のとき} \\ \delta'(q, c) = (q_f, S_o, \Rightarrow) & q \in F \text{ のとき} \end{array}$$

もしも印字問題を判定する機械が存在すれば，入力として M' を与えることで M の停止問題が判定できるので，印字問題が判定不可能である．

一様停止問題

任意の機械 $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して $M' = (K \cup \{q_A, q_C \mid q \in K\} \cup \{q_0^A, q_0^C\}, \Sigma \cup \{\text{A}, \text{C}\}, \delta', q_0^A, \{q_f\})$ を構築する．

$$\begin{array}{lcll} \delta'(q_0^A, c) & = & (\text{A}, q_0^C, \Rightarrow) & c \in \Sigma \cup \{\text{A}, \text{B}\} \\ \delta'(q_0^C, c) & = & (\text{C}, q_0, \Leftarrow) & c \in \Sigma \cup \{\text{A}, \text{B}\} \\ \delta'(q, c) & = & \delta(q, c) & q \in K \setminus F, c \in \Sigma \text{ のとき} \\ \delta'(q, \text{A}) & = & (\text{B}, q_A, \Leftarrow) & q \in K \setminus F \text{ のとき} \\ \delta'(q_A, c) & = & (\text{A}, q, \Rightarrow) & q \in K \setminus F, c \in \Sigma \text{ のとき} \\ \delta'(q, \text{C}) & = & (\text{B}, q_C, \Rightarrow) & q \in K \setminus F \text{ のとき} \\ \delta'(q_C, c) & = & (\text{C}, q, \Leftarrow) & q \in K \setminus F, c \in \Sigma \text{ のとき} \end{array}$$

M' を任意のテープに適用することが M を空テープに適用することと同じなので，一様停止問題が判定可能ならば空テープ停止問題，延いて通常の停止問題，が判定可能になり，矛盾になる．