計算と論理

Jacques Garrigue, 2023 年 12 月 27 日

10　命題論理

命題論理は真偽や推論を考える最も簡単な体系である．基本的な部分は古代ギリシャまで遡る．

10.1　構文と意味論

$$
\begin{array}{rcll}
P, Q & ::= & A & \text{アトム} \\
& | & P \supset Q & \text{含意・ならば} \\
& | & P \wedge Q & \text{論理積・かつ} \\
& | & P \vee Q & \text{論理和・または} \\
& | & \neg P & \text{否定} \\
& | & \top & \text{真} \\
& | & \bot & \text{偽}
\end{array}
$$

アトムはこれ以上真偽性を分解できない事象を差している．たとえば,「時刻は夜」や「空が黒い」．v : アトム $\to \{\top, \bot\}$ という**割り当て関数**を用意すると，その割り当てに対する論理式の真偽 $[\![P]\!]_v$ が計算できる．以下の真偽表を使う．

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \supset Q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

例えば $v(A) = \top$ で $v(B) = \bot$ ならば,

$$[\![A \wedge (\neg B)]\!]_v = \top \wedge \neg\bot = \top \wedge \top = \top$$

任意の割り当てについて $[\![P]\!]_v = \top$ ならば，P を**恒真**と言う．また，任意の割り当てについて $[\![P]\!]_v = [\![Q]\!]_v$ ならば，P と Q は**論理的同値**と言う．

以下の論理式は論理的同値である．

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
\neg A & \Leftrightarrow & A \supset \bot & A \supset B & \Leftrightarrow & \neg A \vee B \\
\neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow & \neg A \vee \neg B & \neg(A \vee B) & \Leftrightarrow & \neg A \wedge \neg B
\end{array}
$$

なお，任意の論理式 P, Q について，P と Q が論理的同値であることと $(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$ が恒真であることは同値である．

10.2　証明論

前説の意味論による定義は，式の全ての割り当てにおける計算を必要としている．アトムが多くなると，2^n 個の場合を考えなければならない．

証明論は式の証明をあらかじめ定めた公理と推論規則から導出することで，もっと簡潔に正しさを保障できる．ここに**自然演繹**と呼ばれる論理体系の伝統的な書き方を示す．

$\supset$ 導入 $$\dfrac{\begin{matrix}[P]^{(n)}\\ \vdots \\ Q\end{matrix}}{P \supset Q}{}^{(n)}$$

$\supset$ 除去 $$\dfrac{P \supset Q \quad P}{Q}$$

$\wedge$導入 $$\dfrac{P \quad Q}{P \wedge Q}$$

$\wedge$ 除去 $$\dfrac{P \wedge Q}{P} \qquad \dfrac{P \wedge Q}{Q}$$

$\vee$導入 $$\dfrac{P}{P \vee Q} \qquad \dfrac{Q}{P \vee Q}$$

$\vee$ 除去 $$\dfrac{P \vee Q \quad P \supset R \quad Q \supset R}{R}$$

背理法 $$\dfrac{\neg P \supset \bot}{P}$$

恒真 $\top$

ここでは $\neg P$ を $P \supset \bot$ の略記法とみなす.

例えば以下のように排中律が証明できる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(P \vee \neg P)^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(P \vee \neg P)^{(2)} \quad \dfrac{\neg P^{(1)}}{P \vee \neg P}}{\bot}}{\neg P \supset \bot}{}^{(1)}}{P}}{P \vee \neg P}}{\bot}}{\neg(P \vee \neg P) \supset \bot}{}^{(2)}}{P \vee \neg P}$$

証明論と意味論の間以下の二つの定理が成り立つ.

定理 1 (健全性) 論理式 P の証明が導出できるなら，P は意味論において恒真である.

定理 2 (完全性) 論理式 P が意味論において恒真なら，P の証明が存在する.

10.3 型付き λ 計算と直観主義命題論理

背理法を推論規則から除いた体系が型付 λ 計算と同型関係にあることはよく知られており，それが **Curry-Howard 対応**と呼ばれている.

具体的には，規則が以下のように対応している.

命題論理	型付 λ 計算
命題	型
$\supset$	$\rightarrow$
$\wedge$	$\times$

命題論理	型付 λ 計算
証明	λ 項
仮定 $[P]^{(n)}$	変数
$\supset$ 導入・除去	抽象・適用
$\wedge$ 導入・除去	対・fst/snd

例えば，$\lambda x : \tau \times \theta.(\mathsf{snd}\ x, \mathsf{fst}\ x)$ の証明は

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \mathsf{snd} : \tau \times \theta \rightarrow \theta \quad \Gamma \vdash x : \tau \times \theta}{\Gamma \vdash (\mathsf{snd}\ x) : \theta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \mathsf{fst} : \tau \times \theta \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash x : \tau \times \theta}{\Gamma \vdash (\mathsf{fst}\ x) : \tau}}{\Gamma = x : \tau \times \theta \vdash (\mathsf{snd}\ x, \mathsf{fst}\ x) : \theta \times \tau}}{\vdash \lambda x : \tau \times \theta.(\mathsf{snd}\ x, \mathsf{fst}\ x) : \tau \times \theta \rightarrow \theta \times \tau}$$

から型の部分だけを残すと以下の証明になる (こでここで (1) が x に対応する)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge B \supset B \quad A \wedge B^{(1)}}{B} \quad \dfrac{A \wedge B \supset A \quad A \wedge B^{(1)}}{A}}{B \wedge A}}{A \wedge B \supset B \wedge A}{}^{(1)}$$

命題論理の証明を項だけから再構築できるので，証明は型導出ではなく，項に対応するという．λ計算を拡張することで，対応が完璧になる．

$$\begin{array}{rcl} \tau & ::= & \ldots \mid \tau + \tau \mid \top \mid \bot \\ M & ::= & \ldots \mid \mathsf{case}\ M\ M\ M \end{array}$$

定数 $\mathsf{left}_{\tau_1 \to (\tau_1 + \tau_2)}$, $\mathsf{right}_{\tau_2 \to (\tau_1 + \tau_2)}$, と $\mathsf{unit}_\top$ も追加し，以下の δ 規則を追加する．

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{case}\ (\mathsf{left}_{\tau_1 \to (\tau_1 + \tau_2)}\ M)\ M_1\ M_2 & \to & M_1\ M \\ \mathsf{case}\ (\mathsf{right}_{\tau_2 \to (\tau_1 + \tau_2)}\ M)\ M_1\ M_2 & \to & M_2\ M \end{array}$$

併せて，以下の推論規則を追加する．

$$\textbf{直和} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \tau_1 + \tau_2 \quad \Gamma \vdash N : \tau_1 \to \theta \quad \Gamma \vdash P : \tau_2 \to \theta}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\ M\ N\ P : \theta}$$

また，命題論理の証明に**シークエント**という表現を使うと関係がより明らかになる．仮定 $[P_1]^{(1)}$, $\ldots, [P_n]^{(n)}$ を使う命題 Q を $P_1, \ldots, P_n \vdash Q$ と書き，$\supset$ の導入を変数と抽象に対応する 2 つの規則に分ける．他の規則について，各前提と結論の前に $\Delta \vdash$ を加えるだけでいい．

$$\Delta \vdash P \quad (P \in \Delta) \qquad\qquad \frac{\Delta, P \vdash Q}{\Delta \vdash P \supset Q}$$

背理法を表現しようと思えば，以下の定数を加えれば，対応が完成する．

$$\mathsf{classic}_{((\tau \to \bot) \to \bot) \to \tau}$$

しかし，背理法を実装した classic に対する δ 規則がないので，背理法を使った証明に対して計算ができない．

これを克服するために，**直観主義論理**という背理法を含まない論理が作られた．厳密には直観主義論理が先にに Brouwer や Gentzen に証明の上の計算が可能な論理として提案され，型付きλ計算はそれに対する計算系となる．

背理法を除くだけでは，否定に関する扱いが弱いので，代わりに推論規則を追加する．

$$\textbf{矛盾} \quad \frac{\bot}{P}$$

要するに，$\bot$ が証明できれば何でも証明できる．

$\bot$ の証明は絶対に作れないので，λ計算では以下の δ 規則が使える．

$$\begin{array}{rcl} (\mathsf{abort}_{\bot \to \tau \to \theta}\ M)\ N & \to & \mathsf{abort}_{\bot \to \theta}\ M \\ M_{\tau \to \theta}\ (\mathsf{abort}_{\bot \to \tau}\ N) & \to & \mathsf{abort}_{\bot \to \theta}\ N \end{array}$$

矛盾が証明できた時点で計算を終了する．

直観主義論理は前述の意味論に対して健全だが，完全ではない（証明できないものもある）．ただし，論理式を二重否定で始めるものに限らせると完全になる．

定理 3 (健全性) 論理式 P の証明が直観主義論理で導出できるなら，P は意味論において恒真である．

定理 4 (完全性) 論理式 P が意味論において恒真なら，直観主義論理において $\neg\neg P$ の証明が存在する．

10.4　2 次λ計算と 2 階命題論理

2 階の命題論理とは、命題変数とその量化を含む命題論理のことである．

$$P ::= A \mid P \supset P \mid X \mid \forall X.P$$

シークエントを使うと，導入と除去規則が以下のとおりになる．

$$\frac{\Delta \vdash P}{\Delta \vdash \forall X.P}\ X \notin FV(\Delta) \qquad\qquad \frac{\Delta \vdash \forall X.P}{\Delta \vdash [Q/X]P}$$

Curry-Howard 対応が 2 次λ計算に拡張される．

2 階命題論理	2 次λ計算
$\forall X.P$	$\forall \alpha.\tau$

なお，2 次λ計算で直積と直和が表現でき，それを使うと 2 階命題論理で $\wedge$ と $\vee$ が $\forall$ と $\supset$ のみで表現できる．

$$\begin{array}{rcl}
\tau \times \theta & = & \forall \alpha.(\tau \to \theta \to \alpha) \to \alpha \\
(M, N) & = & \Lambda \alpha.\lambda f : \tau \to \theta \to \alpha.f\ M\ N : \tau \times \theta \\
\tau + \theta & = & \forall \alpha.(\tau \to \alpha) \to (\theta \to \alpha) \to \alpha \\
\mathsf{left}_{\tau \to \tau + \theta}\ M & = & \Lambda \alpha.\lambda f : \tau \to \alpha.\lambda g : \theta \to \alpha.f\ M : \tau + \theta \\
\mathsf{right}_{\theta \to \tau + \theta}\ M & = & \Lambda \alpha.\lambda f : \tau \to \alpha.\lambda g : \theta \to \alpha.g\ M : \tau + \theta
\end{array}$$

そのまま 2 階命題論理で使え，$\wedge$ と $\vee$ の導入と除去が導出できる．また，$\perp$ も定義でき，矛盾が導出できる．当然ながら，$\perp$ の証明が存在しないので，対応するλ項や導入規則が存在しない．

$$\begin{array}{rcl}
P \wedge Q & = & \forall X.(P \supset Q \supset X) \supset X \\
P \vee Q & = & \forall X.(P \supset X) \supset (Q \supset X) \supset X \\
\perp & = & \forall X.X
\end{array}$$