計算と論理

Jacques Garrigue, 2024 年 1 月 17 日

11 述語論理と依存型

上記の二次λ計算は計算能力という面で単純型付λ計算を拡張するが，論理の面では相変わらず命題論理にしか対応していない．述語論理に対応するために，異なる種類の拡張が必要になる．

11.1 述語論理

述語論理の命題は多相型に似ている．

$$
\begin{array}{rcll}
t & ::= & x \mid a \mid f(t,\ldots) & \text{項} \\
A & ::= & \bot \mid A \to A \mid A \wedge A \mid A \vee A & \\
 & \mid & p(t,\ldots) & \text{述語} \\
 & \mid & \forall x.A & \text{全称} \\
 & \mid & \exists x.A & \text{存在}
\end{array}
$$

全称や存在に関する推論規則も似ている．

$$
\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash \forall x.A}\ x \notin \mathsf{fv}(\Delta) \qquad \frac{\Delta \vdash \forall x.A}{\Delta \vdash [t/x]A} \qquad \frac{\Delta \vdash [t/x]A}{\Delta \vdash \exists x.A} \qquad \frac{\Delta \vdash \exists x.A \quad \Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash B}\ x \notin \mathsf{fv}(\Delta, B)
$$

しかし，よく見ると，ここでは t や x で表されているのは型ではなく，項である．

11.2 依存型

そこで，二次λ計算と少し違う拡張が考えられる．二次λ計算では項の中に型が入ってもよかったが，今度は型の中に項を入れる．このシステムは λP と呼ばれる．

$$
\begin{array}{rcll}
t & ::= & b \mid \bot \mid p_t\ M \mid \forall x{:}t.t \mid \exists x{:}t.t & \text{型} \\
M & ::= & x \mid c_t \mid \lambda x:t.M \mid (MM) \mid (M,M:\exists x.t) & \text{項}
\end{array}
$$

二つ目の型に x が現れない場合，$\forall x{:}t_1.t_2$ (依存関数型) は $t_1 \to t_2$ と書ける．同様に，その場合には $\exists x{:}t_1.t_2$ は $t_1 \times t_2$ と書ける．

推論規則も増やす．特に，型の構成を確認する必要がある．

$$
\textbf{型} \quad \Gamma \vdash b\ \mathrm{ok} \qquad \Gamma \vdash \bot\ \mathrm{ok} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : t}{\Gamma \vdash p_t\ M\ \mathrm{ok}} \qquad \frac{\Gamma, x:t \vdash t'\ \mathrm{ok}}{\Gamma \vdash \forall x{:}t.t'\ \mathrm{ok}} \qquad \frac{\Gamma, x:t \vdash t'\ \mathrm{ok}}{\Gamma \vdash \exists x{:}t.t'\ \mathrm{ok}}
$$

$$
\textbf{変数} \quad \frac{x:t \in \Gamma \quad \Gamma \vdash t\ \mathrm{ok}}{\Gamma \vdash x:t} \qquad\qquad \textbf{定数} \quad \frac{\Gamma \vdash t\ \mathrm{ok}}{\Gamma \vdash c_t : t}
$$

$$
\textbf{抽象} \quad \frac{\Gamma, x:t \vdash M:t'}{\Gamma \vdash \lambda x:t.M : \forall x{:}t.t'}\ x \notin \mathsf{fv}(\Gamma) \qquad \textbf{適用} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \forall x{:}t.t' \quad \Gamma \vdash N : t}{\Gamma \vdash (M\ N) : [N/x]t'}
$$

$$
\textbf{変換} \quad \frac{\Gamma \vdash M : [N/x]t \quad N =_{\beta\delta} N'}{\Gamma \vdash M : [N'/x]t} \qquad \textbf{否定} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \bot \quad \Gamma \vdash t\ \mathrm{ok}}{\Gamma \vdash M : t}
$$

$$
\textbf{依存対} \quad \frac{\Gamma \vdash M:t \quad \Gamma \vdash N : [M/x]t'}{\Gamma \vdash (N, M : \exists x.t') : \exists x{:}t.t'} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \exists x{:}t_1.t_2 \quad \Gamma, x:t_1, y:t_2 \vdash N : t}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ (x,y) = M\ \mathsf{in}\ N : t}\ x, y \notin \mathsf{fv}(\Gamma, t)
$$

以上の定義を使えば，述語論理を表現することができる．実は，述語論理で表現できないものも入ってしまうので，準同型にしかならないが，さらなる制限を加えると同型になる．

例えば,「人間は死ぬ，ソクラテスは人間である，すなわちソクラテスは死ぬ」は以下の型として表現できる．

$$(\forall x{:}\mathit{Name}.\mathit{Human}\ x \to \mathit{Mortal}\ x) \to \mathit{Human}\ \mathit{Socrates} \to \mathit{Mortal}\ \mathit{Socrates}$$

以下の項によって証明される．

$$\lambda \mathit{mortal} : (\forall x{:}\mathit{Name}.\mathit{Human}\ x \to \mathit{Mortal}\ x).\lambda \mathit{human} : (\mathit{Human}\ \mathit{Socrates}).\mathit{mortal}\ \mathit{Socrates}\ \mathit{human}$$

式「$\forall x.x + x = 2 \times x$」も以下のように書ける．

$$\forall x{:}\mathbb{N}.\mathit{eqnat}(\mathsf{add}\ x\ x, \mathsf{mult}\ \mathit{2}\ x)$$

δ規則は以下のとおり．

$$\begin{array}{l} \mathsf{add}\ 0\ n \to n \\ \mathsf{add}\ (\mathsf{s}\ m)\ n \to \mathsf{s}\ (\mathsf{add}\ m\ n) \\ \mathsf{mult}\ 0\ n \to 0 \\ \mathsf{mult}\ (\mathsf{s}\ m)\ n \to \mathsf{add}\ n\ (\mathsf{mult}\ m\ n) \end{array}$$

以下の定数 (公理) を使って証明できる．

$$\begin{array}{l} \mathit{add\_sym} : \forall m{:}\mathbb{N}.\forall n{:}\mathbb{N}.\mathit{eqnat}(\mathsf{add}\ m\ n, \mathsf{add}\ n\ m) \\ \mathit{eq\_sub} : \forall f{:}(\mathbb{N} \to \mathbb{N}).\forall m{:}\mathbb{N}.\forall n{:}\mathbb{N}.\mathit{eqnat}(m, n) \to \mathit{eqnat}(f\ m, f\ n) \end{array}$$

以下の項によって証明される．

$$\lambda x : \mathbb{N}.\mathit{eq\_sub}\ (\mathsf{add}\ x)\ x\ (\mathsf{add}\ x\ 0)\ (\mathit{add\_sym}\ 0\ x)$$

11.3 $\lambda P2$ と定理証明

2次λ計算と組み合わせると表現力がさらに高まり，実際の証明に使える．厳密には型の抽象だけでなく，述語の抽象も加える．そのために，述語の型になるカインド k が必要になる．このシステムは $\lambda P2$ と呼ばれる．

$$\begin{array}{rcl} k & ::= & * \mid t \to k \\ t & ::= & \ldots \mid p_k \mid X \mid \forall X{:}k.t \end{array}$$

カインド $\dfrac{X : k \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : k}$ $\quad \Gamma \vdash p_k : k \quad$ $\dfrac{\Gamma \vdash t : t_1 \to k \quad \Gamma \vdash M : t_1}{\Gamma \vdash t\ M : k}$

型 $\Gamma \vdash b : *$ $\quad \Gamma \vdash \bot : * \quad$ $\dfrac{\Gamma, x : t_1 \vdash t : *}{\Gamma \vdash \forall x{:}t_1.t : *}$ $\quad \dfrac{\Gamma, X : k \vdash t : *}{\Gamma \vdash \forall x{:}k.t : *}$

ここで，$\Gamma \vdash t : *$ が $\Gamma \vdash t\ \mathrm{ok}$ と同じ意味になる．

これらの型を使うと，帰納法に当たる定数が定義できるようになる．

$$\mathit{nat\_ind} : \forall P{:}\mathbb{N} \to *.P\ \mathit{0} \to (\forall n{:}\mathbb{N}.P\ n \to P\ (\mathsf{s}\ n)) \to \forall n{:}\mathbb{N}.P\ n$$

さらに十分な定数があれば，帰納法による証明もできる．

$$\mathsf{eq} : \forall X{:}*.X \to X \to *$$
$$\mathit{eq\_refl} : \forall X{:}*.\forall x{:}X.\mathsf{eq}\ X\ x\ x$$
$$\mathit{eq\_ind} : \forall X{:}*.\forall x{:}X.\forall P{:}X \to *.\forall y{:}X.\mathsf{eq}\ X\ x\ y \to P\ x \to P\ y$$

以下が $\forall n.n + 0 = n$ の証明になる.

$$\begin{aligned}
&\vdash \mathit{nat_ind}\ (\lambda n : \mathbb{N}.\mathsf{eq}\ \mathbb{N}\ (\mathsf{add}\ n\ \mathit{0})\ n)\ (\mathit{eq_refl}\ \mathbb{N}\ \mathit{0}) \\
&\quad (\lambda n : \mathbb{N}.\lambda h : \mathsf{eq}\ \mathbb{N}\ (\mathsf{add}\ n\ \mathit{0})\ n. \\
&\qquad\quad \mathit{eq_ind}\ \mathbb{N}\ n\ (\lambda m : \mathbb{N}.\mathsf{eq}\ \mathbb{N}\ (\mathsf{s}\ m)\ (\mathsf{s}\ n))\ (\mathsf{add}\ n\ \mathit{0})\ (\mathit{eq_refl}\ \mathbb{N}\ (\mathsf{s}\ n))\ h) \\
&\ \ : \forall n{:}\mathbb{N}.\mathsf{eq}\ \mathbb{N}\ (\mathsf{add}\ n\ 0)\ n
\end{aligned}$$