不定積分と定積分

Jacques Garrigue, 2019 年 6 月 25 日

原始関数　関数 $F(x)$ が微分可能で，$F'(x) = f(x)$ ならば，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という．

不定積分　関数 $f(x)$ が原始関数 $F(x)$ を持つならば，

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

と書き，それを $f(x)$ の不定積分と呼ぶ．

積分定数　$f(x)$ の不定積分は一意に定まらない．なぜならば，$F(x)$ を原始関数とすると，任意の $c \in \mathbf{R}$ について $F(x) + c$ も $f(x)$ の原始関数である．

しかし，$F(x)$ と $G(x)$ が共に $f(x)$ の原始関数ならば，$(G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$ なので，定理 2.2.4 より，$\exists c \in \mathbf{R}, \forall x,\ G(x) - F(x) = c$, すなわち

$$\forall x,\ G(x) = F(x) + c \quad (c\,定数).$$

例　$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad (c\,定数)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c,\ \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int x^{-1}\,dx = \log x + c,\ \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c\ (a \neq -1)$$

定積分　$f(x)$ を区間 $[a,b]$ で連続な関数とする．曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$, $x = b$, $y = 0$ に囲まれた部分の面積を $f(x)$ の a から b までの定積分という

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

(もしも $f(x) < 0$ の部分があれば，そこを負の面積として扱う)

面積が足せるので，$c \in [a,b]$ ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

また，ベクトルと同様に，逆方向の積分を負とすると，足し算と整合性が取れる．

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

定理 3.1.1 (定積分と不定積分) $f(x)$ が区間 I で連続とする．$a \in I$ について

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

とすると，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数になる．

定理 3.1.2 $f(x), g(x)$ が $[a,b]$ で連続とする．

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad (k \in \mathbf{R})$

定理 3.1.3 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続とする．$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b \qquad \text{ただし } [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

例 $\displaystyle \int_0^1 x^5 = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

定理 3.1.4 $x(t)$ が微分可能ならば，**置換積分**ができる．

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))x'(t)dt \ \left(= \int f(x)\frac{dx}{dt}dt\right)$$

また，$f(x)$ が微分可能で，$G(x)$ が $g(x)$ の原始関数ならば，**部分積分**ができる．

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

例 $\displaystyle \int \sin^2 x\cos x\,dx = \int u^2\frac{du}{dx}\,dx = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x \quad (u = \sin x)$

例 $\displaystyle \int \log x\,dx = x\log x - x \quad (g(x) = 1 \text{ で部分積分})$

定積分の計算　それぞれを定積分に応用すると，以下の定理が得られる．

定理 3.1.5 $f(x)$ が区間 I で定義され，$x(t)$ が微分可能で，$x([\alpha,\beta]) \subset I$ ならば．

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$$

定理 3.1.6 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で微分可能で，$G(x)$ が $g(x)$ の原始関数ならば

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

基本的な不定積分　多くの原始関数はその導関数から直接に推測できる．しかし，非自明なものもあり，以下によく使うものを記す．教科書の表も参考にして下さい．

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{|a|}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log|x+\sqrt{x^2+a}|$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{|a|})$$
$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\log|x+\sqrt{x^2+a}|)$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \log x\,dx = x\log x - x$$

宿題　2.4.4, 3.1.1