平均値の定理

Jacques Garrigue, 2019 年 5 月 28 日

極値　$f(x)$ が $x = c$ で極大とは,

$$\exists J \text{ 開区間}, c \in J \wedge \forall x \in J, x \neq c \Rightarrow f(x) < f(c)$$

同様に極小とはは,

$$\exists J \text{ 開区間}, c \in J \wedge \forall x \in J, x \neq c \Rightarrow f(x) > f(c)$$

$f(c)$ を c における $f(x)$ の極値という.

定理 2.2.1 $f(x)$ が c を含む開区間 I で定義され，$x = c$ で微分可能とする．$f(x)$ が $x = c$ で極値または最大値・最小値をもてば，$f'(c) = 0$.

定理 2.2.2 (ロル) $f(x)$ が $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする．

$$f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; \exists c \in (a, b), f'(c) = 0$$

定理 2.2.3 (平均値) $f(x)$ が $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする．

$$\exists c \in (a, b), f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

定理 2.2.4 $f(x)$ が区間 I で微分可能とする．

$$\forall x \in I, f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \exists k, \forall x \in I, f(x) = k$$

定理 2.2.5　(1) $f(x)$ が $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする．

$$\begin{aligned} \forall x \in (a, b), f'(x) > 0 \;&\Rightarrow\; f(a) < f(b) \\ \forall x \in (a, b), f'(x) < 0 \;&\Rightarrow\; f(a) > f(b) \end{aligned}$$

(2) $f(x)$ が区間 I で微分可能とする．$f'(x) > 0$ なら単調増加，$f'(x) < 0$ ならば単調減少.

例題　$\forall x \in \mathbf{R}, x < e^x$

定理 2.2.6 (コーシーの平均値)

$f(x), g(x)$ が $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする．$g(a) \neq g(b)$ かつ $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ ならば

$$\exists c \in (a, b),\; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

不定形　$\lim_{x\to a} f(x)$ と $\lim_{x\to a} g(x)$ がともに 0, またはともに ∞ か $-\infty$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ を不定形という．前者は $\frac{0}{0}$ 型，後者は $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

同様に $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ には 0^0 型，1^∞ 型，∞^0 型の不定形がある．

定理 2.2.7 (ロピタル) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形とする．もしも $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

指数式の不定形にも使える．

例題　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-\sin x}{x^2}$ を計算せよ．

宿題　2.2.2, 2.2.4