ε - δ 論法

Jacques Garrigue, 2019 年 5 月 14 日

厳密な定義　今まで,「限りなく近付ける」という概念を使って来た．定理をそのまま使う場合，それであまり困らないが，定理を証明したりする場合，もっと厳密な定義が欲しくなる．それが「ε - δ 論法」である．

数列の収束　$\{a_n\}$ を数列，α を実数とする．任意の正の数 ϵ に対して，自然数 N が存在し，以下の条件をみたすならば，数列 $\{a_n\}$ が α に収束するといい，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く．

$n > N$ をみたす任意の n について $|a_n - \alpha| < \epsilon$

それを論理式で書くと，(以降 $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\} = (0, \infty)$ とする)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\epsilon \in \mathbf{R}^+, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

発散は上の式をみたす α が存在しないことにあたる．

$$\neg\exists\alpha \in \mathbf{R}, \forall\epsilon \in \mathbf{R}^+, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\alpha \in \mathbf{R}, \exists\epsilon \in \mathbf{R}^+, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, n > N \wedge |a_n - \alpha| \geq \epsilon$$

また、∞ と $-\infty$ への発散はそれぞれ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M \in \mathbf{R}, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n > N \Rightarrow a_n > M$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M \in \mathbf{R}, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n > N \Rightarrow a_n < M$$

例　$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ は $\delta = -\log_2 \epsilon$ で証明できる．

例題　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \alpha.$

Cauchy 列　数列 $\{a_n\}$ が以下の条件をみたせば，Cauchy 列である．

$$\forall\epsilon \in \mathbf{R}^+, \exists N \in \mathbf{N}, \forall m, n \in \mathbf{N}, m > N \wedge n > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

定理 1.4.1 全ての *Cauchy* 列が収束する．

実数の連続性の公理と同値な性質だが，こちらの方が証明しやすい場合がある．

関数の極限　関数 $f(x)$ が点 a を含む区間で定義されているとする．$f(x)$ の a での極限が l とは，任意の正の数 ϵ に対して，ある正の数 δ が存在し，

$0 < |x - a| < \delta$ をみたす任意の x について $|f(x) - l| < \epsilon$

がなりたつことである．それを論理式で書くと，

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\epsilon \in \mathbf{R}^+, \exists\delta \in \mathbf{R}^+, \forall x \in \mathbf{R}, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

また，左極限とと右極限はそれぞれ

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\epsilon \in \mathbf{R}^+, \exists\delta \in \mathbf{R}^+, \forall x \in \mathbf{R}, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\epsilon \in \mathbf{R}^+, \exists\delta \in \mathbf{R}^+, \forall x \in \mathbf{R}, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

例題　$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ の論理式を書きなさい．

関数の連続性　関数 $f(x)$ が点 a を含む区間で定義されているとする．$f(x)$ が a で連続とは以下の性質である．

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbf{R}^+, \exists \delta \in \mathbf{R}^+, \forall x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

例題　関数 $f(x), g(x)$ が点 a で連続ならば，関数 $f(x) + g(x)$ も a で連続であることを ε - δ 論法で示せ．

関数の一様連続性　関数 $f(x)$ が区間 I で定義されているとする．任意の ϵ に対して，I のどこでも同じ δ を使って連続性が証明できるなら，$f(x)$ は I で一様連続という．

$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}^+, \exists \delta \in \mathbf{R}^+, \forall x, y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

定理 1.4.2 関数 $f(x)$ が閉区間 I で連続ならば，$f(x)$ は I で一様連続である．

問題の解答

1.3.2　(1) $\theta = \mathrm{Cos}^{-1}x = \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{5},\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2})$.

$$\tan\theta = \sqrt{5} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} \Rightarrow 6\cos^2\theta = 1 \Rightarrow x = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(2) $\theta = \mathrm{Cos}^{-1}x = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{3} + \mathrm{Sin}^{-1}\frac{7}{9} = \alpha + \beta,\ \theta, \alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$x = \cos\theta = \cos\alpha + \beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \sqrt{\frac{8}{9}}\sqrt{\frac{32}{81}} - \frac{1}{3}\frac{7}{9} = \frac{16}{27} - \frac{7}{27} = \frac{1}{3}$$

1.3.3　(1) $t = ax$　(2) $t = 2x$　(3) $t = x - 1$

レポート課題 (5 月 21 日まで)

説明や証明はなるべく詳しく書きましょう．

(1) 次の集合の上限と下限を求めよ．$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

(i) $\left\{a_n = \sup_{x \geq n} \frac{x}{1+x^2} \mid n \in \mathbf{N}^+\right\}$　(ii) $\left\{n \sin\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^+\right\}$

(2) 次の極限を求めよ．

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{n^3 + 100}$　(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r}\binom{n}{r}$　(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$

(3) 次の関数の連続性を調べよ．

(i) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$　(ii) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \text{ のとき} \\ 0 & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$

(4) 教科書の問題 1.4.3

(5) 関数 $f(x)$ が区間 I で連続でないことと一様連続でないことをそれぞれ論理式で書きなさい．連続でありながら一様連続でない関数の例を示しなさい．