初等関数

Jacques Garrigue, 2019 年 5 月 7 日

単調な関数　区間 I で定義された関数 $f(x)$ が「$x < y$ ならば $f(x) < f(y)$」をみたすとき，$f(x)$ が単調増加という.「$f(x) > f(y)$」のとき，単調減少という.

例　$\cos x$ は区間 $(0, \pi)$ で単調減少である.

逆関数　関数 $y = f(x)$ が集合 I で定義され，関数 $x = g(y)$ が集合 $J = f(I)$ で定義され，$x \in I$ について

$$y = f(x) \ \Leftrightarrow \ x = g(y)$$

をみたすとき g は f の逆関数といい，$g = f^{-1}$ と書く．そのとき $f = g^{-1}$ も成り立つ.

例　$g(y) = \sqrt{y}$ が $f(x) = x^2$ の逆関数である $(I = J = [0, \infty))$.

定理 1.3.1 (逆関数の存在)　$y = f(x)$ が $[a, b]$ で連続な単調増加関数ならば，$[f(a), f(b)]$ で定義される f の逆関数が存在する．単調減少なら $[f(b), f(a)]$ で定義される.

系　両方の連続性から $d = f(c)$ ならば $x \to c \ \Leftrightarrow \ y \to d$.
　すなわち x と y を置き換えて極限を求めることができる.

一般化　一般の (閉じていない) 区間でも成り立つ.

逆三角関数　$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ はそれぞれ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0, \pi]$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で単調なので，その区間で逆関数を持つ.

$$x = \mathrm{Sin}^{-1} y = \arcsin y, \quad x = \mathrm{Cos}^{-1} y = \arccos y, \quad x = \mathrm{Tan}^{-1} y = \arctan y$$

なお，前二つが $[-1, 1]$ で定義され，$\mathrm{Tan}^{-1} x$ が $\mathbf{R}$ 全体で定義される.

例　$\sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Sin}^{-1} \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

例題　次の方程式をみたす x を求めよ.

$$\mathrm{Sin}^{-1} x = \mathrm{Cos}^{-1} \frac{3}{5}$$

2 項係数　自然数 n と $k \le n$ に対し,

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

を定義する (ただし $0! = 1$). 2 項係数は 2 項展開の係数である.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k$$

例題　$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ が収束し，$2 \leq e \leq 3$.

指数関数　$a>0$ のとき a^x は $\mathbf{R}$ 全体で連続な関数である．$a>1$ ならば単調増加で，$0<a<1$ ならば単調減少である．$a=e$ のとき $\exp x = e^x$ と書く．

対数関数　$a>0,\ a\neq 1$ ならば $y=a^x$ が $(0,\infty)$ で定義された逆関数をもつ．$x=\log_a y$ と書く．指数関数と同様，$a>1$ ならば対数関数が単調増加で，$0<a<1$ ならば単調減少である．

$\log x$ は一般的に $\log_e x$ を指すが，文脈によって変わることもある．物理では $\log x = \log_{10} x$, 情報科学で $\log x = \log_2 x$ とすることが多い．その場合，$\ln x = \log_e x$ と定める．

定理 1.3.2 e を関数の極限値として定義できる．

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

例題　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

ヒント：定理 1.3.2 と定理 1.3.1 の系を使う．

問題の解答

1.2.1

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-(1-x^2)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})} = 1$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{2x}\frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{2x}\frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3) $$\begin{cases} -x \leq x\sin\dfrac{1}{x} \leq x \ (x>0) \\ x \leq x\sin\dfrac{1}{x} \leq -x \ (x<0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}$$

(5) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot 1^2$$

宿題　1.3.2, 1.3.3, 1.3.4