# 連続関数

Jacques Garrigue, 2019 年 4 月 23 日

**関数の極限**　$f(x)$ を $a \in \mathbf{R}$ の近くで定義された関数とする ($a$ で定義されなくてもいい)．$x \neq a$ で $x$ を $a$ に近づけたときに，$f(x)$ が $l$ に限りなく近づくなら，$f(x)$ の $a$ での極限が $l$ という．

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

$a$ や $l$ が $\pm\infty$ のときも定義される．

**例**　$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

**定理 1.2.1 (関数の極限)** $\lim_{x \to a} f(x) = l,\ \lim_{x \to a} g(x) = m\ (l, m \in \mathbf{R})$ とする．そのとき

(1) $\lim_{x \to a}(f(x)+g(x)) = l+m$　　(2) $\lim_{x \to a} cf(x) = cl \quad (c \in \mathbf{R})$

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = lm$　　(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m} \quad (m \neq 0)$

**右極限，左極限**　$x > a$ を $a$ に右から近づけたときに $f(x)$ が $l$ に限りなく近づくなら，$l$ が $f(x)$ の $a$ での右極限という．

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = l$$

同様に $x < a$ を左から近づけたときに，$l$ が左極限という．

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = l$$

定理 1.2.1 が右極限と左極限にも使える．
また，$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l$ と $\lim_{x \to a} f(x) = l$ とは同値である．

**例**　$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty,\ \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$ なので $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ が定義されていない．

**例題**　$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ を示せ．($0^+$ と $0^-$ に分ける)

**関数の連続性**　点 $a$ を含む空間で定義された関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ということである．ただし $a$ が区間の端なら，$a^+$ または $a^-$ での左右極限を使う．
$f(x)$ がある区間 $I$ の全ての点で連続なら，$f(x)$ が $I$ で連続という．

**例題**　$\sin x$ は $\mathbf{R}$ 全体で連続であることを示せ．(差分を使う)

**定理 1.2.2 (連続関数の和，積，商)** $f(x),\ g(x)$ が点 $a$ で連続なら，次の関数も $a$ で連続

$$f(x)+g(x), \quad cf(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(a) \neq 0)$$

区間連続についても同様．

**合成関数**　$z = g(y)$，$y = f(x)$ のとき，$z = g(f(x))$ を関数 $f$ と $g$ の合成という．関数 $g \circ f$ や $(g \circ f)(x)$ とも書く．

**定理 1.2.3 (合成関数の連続性)** $y = f(x)$ が $x = a$ で連続で，$z = g(y)$ が $y = f(a)$ で連続なら，$z = g(f(x))$ が $x = a$ で連続である．

**例題**　$\cos x$ と $\dfrac{\sin x^2}{x^2+2}$ が $\mathbf{R}$ 全体で連続であることを示せ．$(\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}))$

**定理 1.2.4 (中間値の定理)** $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ において連続で $f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 $l$ に対して $f(c) = l$ となる $c$ が必ず存在する．

**定理 1.2.5 (閉区間における最大最小)** $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば，$f(x)$ は $[a, b]$ で最大値と最大値をもつ．

**例**　$\dfrac{1}{x}$ は $(0, 2]$ で最大をもたないが $[1, 2]$ ではもつ．

## 問題の解答

### 1.1.2

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$

$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n+1} - a_n$ に注目する．$a_n$ の関数としてみたとき，この差が0になるのは $x^2 - x - 1 = 0$ の解である必要がある，すなわち $a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($a_n < 0$ は不適).

$-1 < a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ならば $a_n < a_{n+1}$ である ($\sqrt{2} - 1 > 0$ と中間値の定理より)．また，$f(x) = \sqrt{x+1}$ が増加関数で $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ より $a_{n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$．$\{a_n\}$ は有界で単調増加なので，実数の連続性より，$\{a_n\}$ が $[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ の中に極限 $\alpha$ をもつ．また，$\alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ なら，$\sqrt{\alpha+1} - \alpha > 0$ より，十分に近い $a_n < \alpha$ を選ぶと $\sqrt{x+1} - x$ の連続性から $a_{n+1} - \alpha > 0$ となり，$\alpha$ が極限であると矛盾する．よって

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$

同様に，$a_{n+1} - a_n = \dfrac{4 - 2a_n^2}{2a_n + 3}$，そして $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x+3}$ は単調増加 ($f'(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^2}$) で $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

$1 \leq a_n < \sqrt{2}$ ならば $a_n < a_{n+1} < \sqrt{2}$ より，$\{a_n\}$ は有界で単調増加なので，実数の連続性より，$\{a_n\}$ が $[1, \sqrt{2}]$ の中に極限 $\alpha$ をもち，$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2}$.

**宿題**　1.2.1, 1.2.2, 1.2.4, 1.2.5, 1.2.7.