区分求積法と応用

Jacques Garrigue, 2019 年 7 月 16 日

定積分の根拠　ここまで定積分を連続関数の閉区間に限定して来た．この場合，面積との関係が明かだからだ．

しかし，連続でない関数の面積が定義できる場合もある．もっと一般的な定義が望まれる．

よく使われる定積分の定義はリーマン積分だが，定義が若干技巧的なので，より必然性が分かりやすいダルブー積分を紹介する．実際リーマン積分可能性とダルブー積分可能性が同値なので，最も一般的に使われる積分可能性の概念だと言える．

区間の分割　区間 $[a,b]$ を n 個の区間に分割するには，a,b を端とする $n+1$ 個の点を選ぶ．

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$|\Delta| = \min_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$ を Δ の細かさという．

分割の細分化　$\Delta' = \{x'_0, \dots, x'_{n'}\}$ が Δ の点を含むならば．Δ' が Δ の細分化という．

$$\Delta' \le \Delta \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Delta \subset \Delta' \wedge \max\Delta = \max\Delta' \wedge \min\Delta = \min\Delta'$$

ダルブー積分の定義　関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で定義されるとする．$[a,b]$ の各分割 Δ に対して以下の和を定義する．

$$s(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} \qquad S(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}$$

細分化が区間をさらに分割するだけなので $\Delta' \le \Delta$ ならば

$$s(f,\Delta) \le s(f,\Delta') \le S(f,\Delta') \le S(f,\Delta).$$

これにより，Δ が自由に動くとき，$s(f,\Delta)$ と $S(f,\Delta)$ が共に有界で，

$$\sup_{\Delta_1 \le \{a,b\}} s(f,\Delta_1) \le \inf_{\Delta_2 \le \{a,b\}} S(f,\Delta_2).$$

背理法から，もしも $\sup_{\Delta_2 \le \{a,b\}} S(f,\Delta_2) < \inf_{\Delta_1 \le \{a,b\}} s(f,\Delta_1)$ ならば，$S(f,\Delta_2) < s(f,\Delta_1)$ になるような Δ_1, Δ_2 が存在することになるが，$s(f,\Delta_1) \le s(f,\Delta_1 \cup \Delta_2) \le S(f,\Delta_1 \cup \Delta_2) \le S(f,\Delta_2)$ と矛盾する．

$f(x)$ が $[a,b]$ でダルブー積分可能であるとは，この上限と下限が等しいときをいう．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{\Delta_1 \le \{a,b\}} s(f,\Delta_1) = \inf_{\Delta_2 \le \{a,b\}} S(f,\Delta_2)$$

例　$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases}$ が $[0,1]$ で積分不可能である．$\sup_\Delta s(f,\Delta) = 0 < \inf_\Delta S(f,\Delta) = 1$.

定理 3.4.1 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続ならば，積分可能である．

定理 3.4.2 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (c_i \in [x_{i-1}, x_i])$$

曲線の長さ　面積と同様に曲線長さを分割によって定義できる．曲線 C の 2 つの点 P, Q の間に経由点 $P_1, \ldots, P_{n-1}$ をおくことで，折れ線 $P = P_0P_1 \ldots P_{n-1}P_n = Q$ の長さを計算できる．$\overline{P_{i-1}P_i}$ を線の区間の長さとする．P から Q までの線の長さは

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$$

の各区間の長さが 0 に近付くときの極限である．

定理 3.4.3 $f(x)$ が連続微分可能ならば，曲線 $C : y = f(x)$ の $P(a, f(a))$ と $Q(b, f(b))$ の間の長さは

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

例　$C : y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$

定理 3.4.4 曲線 $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b)$ で $x(t)$ と $y(t)$ が共に連続微分可能ならば，その長さは

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

例　$C : x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$

宿題　3.4.1, 3.4.2