広義積分

Jacques Garrigue, 2019 年 7 月 9 日

広義積分　関数 $f(x)$ は右に開いた区間 $[a,b)$ $(b \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\})$ で連続とする．$\displaystyle\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx$ が収束するなら，$f(x)$ が区間 $[a,b)$ で積分可能で，その (広義) 積分は

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx$$

左に開いた区間で同様に定義される．

例　$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{\beta\to 2^-}\int_1^\beta \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{\beta\to 2^-}\Big[-2\sqrt{2-x}\Big]_1^\beta = 2$$

例　$$\int_a^\infty x^k\,dx = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} -\frac{1}{k+1}\,a^{k+1} & (k<-1) \\ \text{発散} & (k\geq -1)\end{cases}$$

例　$$\int_a^b (b-x)^k\,dx = \lim_{x\to b^-} -\frac{(b-x)^{k+1}-(b-a)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{k+1}\,(b-a)^{k+1} & (k>-1) \\ \text{発散} & (k\leq -1)\end{cases}$$

例　$$\int_a^\infty e^{kx}\,dx = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{kx}-e^{ka}}{k} = \begin{cases} -\frac{1}{k}\,e^{ka} & (k<0) \\ \text{発散} & (k\geq 0)\end{cases}$$

開区間における定積分　$f(x)$ が開区間 (a,b) で積分可能とは，適当な $c \in (a,b)$ について $f(x)$ が $(a,c]$ と $[c,b)$ で積分可能であることをいう．積分可能性も広義積分も c の選び方によらない．

例　$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{a\to -1}\Big[\mathrm{Sin}^{-1}x\Big]_a^0 + \lim_{b\to 1}\Big[\mathrm{Sin}^{-1}x\Big]_0^b = \Big[\mathrm{Sin}^{-1}x\Big]_{-1}^1 = \pi$$
原始関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ が $[-1,1]$ で連続なので．

例　$$\int_{-\infty}^\infty e^{k|x|}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{k|x|}\,dx + \int_0^\infty e^{k|x|}\,dx = \lim_{x\to -\infty}\frac{1-e^{-kx}}{-k} + \lim_{x\to\infty}\frac{e^{kx}-1}{k} = \begin{cases} \frac{2}{k} & (k<0) \\ \text{発散} & (k\geq 0)\end{cases}$$

広義積分の存在　値が計算できなくても，広義積分が収束するかどうか判定できる場合がある．

定理 3.3.1 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b)$ で連続とする．連続関数 $g(x)$ が $(i)(ii)$ の両方をみたせば，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が存在する．

(i)　$|f(x)| \leq g(x)$　　　(ii)　$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が存在する．

ここで $g(x)$ を $f(x)$ の**優関数**という．

定理 3.3.2 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b)$ で連続とする．連続関数 $g(x)$ が $(i)(ii)$ の両方をみたせば，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が発散する．

(i)　$0 \leq g(x) \leq f(x)$　　　(ii)　$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ が発散する．

例　$\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{-1/2}\,dx$ が存在するので，$\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ も存在する．

ガンマ関数　$\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ をガンマ関数という．

$s>0$ のとき，$\Gamma(s)$ が収束する．それを示すために $f(x)=e^{-x}x^{s-1}$ とおく．

(1) 任意の a について区間 $(0,a]$ で x^{s-1} は $f(x)$ の優関数であるので，$f(x)$ が積分可能である．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^{-x/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{s-1}}{e^{x/2}}=0$ より，$x>a$ ならば $|f(x)|\le e^{-x/2}$ となるような a が存在し，$[a,\infty)$ において $e^{-x/2}$ が $f(x)$ の優関数である．同じ a を (1) に使うと $\Gamma(s)$ の存在が分かる．

不連続点を含む関数の積分　関数 $f(x)$ が区間 (a,b) で $c_1,\dots,c_k$ を除いて連続とする．$f(x)$ が連続である各開区間において積分可能なら，$f(x)$ が (a,b) で積分可能で，その広義積分は

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c_1} f(x)\,dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\ldots+\int_{c_k}^{b} f(x)\,dx$$

例　$$\int_{-1}^2\frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx=\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{-x}}+\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x}}=\Big[-2\sqrt{-x}\Big]_{-1}^0+\big[2\sqrt{x}\big]_0^2=2+2\sqrt{2}$$

問題の解答

3.1.2　(5) $\dfrac12\Big[\mathrm{Tan}^{-1}x^2\Big]_0^1$　(6) $-\dfrac12\left[\dfrac{1}{1+x^2}\right]_0^2$　(7) $\dfrac12\Big[(x^2+1)(\log(x^2+1)-1)\Big]_0^2$　(8) $\dfrac12\Big[e^{x^2}\Big]_1^2$

3.2.1　(1)　$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$　　$\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{5}{(x-3)(x+2)}$

$$\int\frac{x^2}{x^2-x-6}\,dx=\int 1+\frac{x+6}{x^2-x-6}\,dx=\int 1+\frac12\frac{2x-1}{x^2-x-6}+\frac{13}{2}\frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx=$$
$$\int 1+\frac12\frac{2x-1}{x^2-x-6}+\frac{13}{10}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx=x+\frac12\log(x-3)(x+2)+\frac{13}{10}\log\frac{x-3}{x+2}$$

(2)　$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x-a}{x^2+1}=\dfrac{1-ax+x+a}{(x-1)(x^2+1)}\ \Rightarrow\ a=1$

$$\int\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx=\int\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}\,dx=\int\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

3.2.2　(1)　$t=\sqrt{x+1}$　$x=t^2-1$　$dx=2t\,dt$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int\frac{2t\,dt}{t(t^2-1)}=\int\frac{2}{(t-1)(t+1)}\,dt=\int\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\,dt=\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

3.2.3　(1)　$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\,du}{1+u^2}=\int\frac{2\,du}{2}=u=\tan\frac{x}{2}$$

レポート課題 (7 月 16 日まで)

1) 3.1.2 の (1)〜(4) (不定積分を含めて)

2) 3.2.1 の (3) と (4), 3.2.2 の (2), 3.2.3 の (3) および 3.2.4 (不定積分を含めて)

3) 以下の広義積分の収束と発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{2+\sin e^x}{x\sqrt{x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{2+\sin e^x}{\sqrt{x}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1}{x\,|\log x|^\lambda}\,dx$　$(\lambda>0)$

4) $F(x)$ は $[a,b]$ で連続で，$c_1,\dots,c_k$ を除いて (a,b) で連続微分可能とする．広義積分 $\displaystyle\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a)$ であること証明せよ．