積分の計算

Jacques Garrigue, 2019 年 7 月 2 日

有理式の積分　任意の有理式 (多項式同士の分数) は分母の因数分解により必ず以下の 3 種類のものの和として書ける．

(i) 多項式　　(ii) $\dfrac{a}{(x+b)^n}$　　(iii) $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$ (分母は 0 を持たないとき)

それぞれの不定積分が計算できるので，全体がの不定積分が計算できる．

特に (iii) について，分母が 0 を持たないということは $((x+c/2)^2+f^2)^n$ と書けることを意味し，$u=x+c/2$ とおくと不定積分が以下になる．$n=1$ のとき，

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d} = \int \frac{au}{u^2+f^2}\,du + \int \frac{g}{u^2+f^2}\,du = -\frac{a}{2}\log(u^2+f^2) + \frac{g}{f}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{u}{f}$$

ここで $f=\sqrt{d-c^2/4}$, $g=b-ac/2$. また，$n>1$ のとき，

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} = \int \frac{au}{(u^2+f^2)^n}\,du + \int \frac{g}{(u^2+f^2)^n}\,du = \frac{-a}{2(n-1)(u^2+f^2)^{n-1}} + \frac{g}{f^{2n-1}}I_n$$

ここでさらに $I_n=\displaystyle\int \frac{dv}{(v^2+1)^n}, v=\frac{u}{f}, dv=\frac{du}{f}, n\neq 1.$

I_n は $I_1=\mathrm{Tan}^{-1}v$ と漸化式 $I_{n+1}=\dfrac{v}{2n(v^2+1)^n}+\dfrac{2n-1}{2n}I_n$ で計算できる (問題 3.2.6 参照, 漸化式は I_n を $g(v)=1$ の部分積分法で計算すれば得られる).

例 $$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}dx = \int \frac{1}{2x-3}+\frac{2}{x+2}dx = \frac{1}{2}\log|2x-3| + 2\log|x+2|$$

例 $$\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{u}{u^2+1}du + \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) + \mathrm{Tan}^{-1}(x+1)$$

無理関数を含む有理式の積分　特定の $ax+b$ について $\sqrt[n]{ax+b}$ を含む有理式は $t=\sqrt[n]{ax+b}$ とおくことで t の有理式になる．$x=\dfrac{t^n-b}{a}$, $dx=\dfrac{n}{a}t^{n-1}$ を使うことで式が変換できる．

例 $$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} &= \int \frac{2t\,dt}{t^2+1+2t} = \int \frac{2t+2}{t^2+2t+1}\,dt - \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2} = \log(t^2+2t+1) + \frac{2}{t+1}\\ &= 2\log(\sqrt{x-1}+1) + \frac{2}{\sqrt{x-1}+1}\end{aligned}$$

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ を含む有理式は

- $a>0$ のとき，$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\sqrt{a}x$ とおくことで t の有理式になる．
  $x=\dfrac{t^n-b}{a}$, $dx=\dfrac{n}{a}t^{n-1}$ を使うことで式が変換できる．
- $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ であるとき，$t=\sqrt{a\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}}$ でも t の有理式になる．

三角関数の有理式の積分　$u = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくことで u の有理式になる．
特に，$dx = \dfrac{2\,du}{1+u^2}$，$\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$，$\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.
ただし，もっと簡単な置換でできる場合も多い．

例
$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{1+u^2+2u}{2}\frac{2\,du}{1+u^2} = \int 1 + \frac{2u}{1+u^2}\,du = u + \log(1+u^2)$$
$$= \tan\frac{x}{2} + \log(1+\tan^2\frac{x}{2})$$

漸化式　部分積分法を使うと，n を次数などとして含む式を $n-1$ や $n-2$ の同様の式から得ることができるときがある．それを使うことで，繰り返しにより原始関数が得られる．

例
$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x\,dx + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x\,dx + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$
よって
$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
$I_0 = x,\ I_1 = \sin x$ を使うと，任意の I_n を漸化式から計算できる．

問題の解答

3.1.1

(1) $u = e^x, du = e^x\,dx, \displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{du}{u^2+1} = \mathrm{Tan}^{-1} u$

(2) $u = \log x, du = \dfrac{dx}{x}, \displaystyle\int \frac{dx}{x\log x} = \frac{du}{u} = \log u$

(3) $u = 1+3x, du = -3\,dx \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{1/2}$

(4) $u = 1-x^2, du = -2x\,dx$　(5) $u = 1+x^2, du = 2x\,dx$　(6) $u = x+1$　(7) $u = \cos x$

(8) $g(x) = 1, G(x) = x, \displaystyle\int \mathrm{Sin}^{-1} x\,dx = x\mathrm{Sin}^{-1} x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\mathrm{Sin}^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

(9) $g(x) = e^{3x}, G(x) = \dfrac{e^{3x}}{3}, \displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}x e^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}\,dx$

(10) $g(x) = x$　(11) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(12) $u = x+2, \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-(x+2)^2}}\,dx = \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,du - 2\int \frac{du}{1-u^2}$

宿題　3.1.2, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4