実数

Jacques Garrigue, 2019 年 4 月 16 日

有理数　自然に構築できる様々な数の集合

自然数　$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

整数　$\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$

有理数　$\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\right\} = \left\{0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$

こういうように構築された数は全部リストに並べられる．

数直線　直線上に数を並べたものを数直線という．数直線上の全ての点を実数 ($\mathbf{R}$ の要素) という．有理数でないものも含まれる．($\sqrt{2}, \pi$ など)

順序　数直線上の全ての数が比較できる．

$a, b \in \mathbf{R}$ ならば $a < b$ または $a = b$ または $a > b$

論理記号と使うと

$$\forall a, b \in \mathbf{R},\ a < b \vee a = b \vee a > b$$

なお
$$\begin{array}{lll} a > b \ \Leftrightarrow\ b < a & \qquad & a < b < c \ \Leftrightarrow\ a < b \wedge b < c \\ a \leq b \ \Leftrightarrow\ (a = b \vee a < b) & & a \geq b \ \Leftrightarrow\ b \leq a \end{array}$$

区間
$$\begin{array}{lcll} (a, b) & = & \{x \mid a < x < b\} & \text{開区間} \\ [a, b) & = & \{x \mid a \leq x < b\} & \\ (a, b] & = & \{x \mid a < x \leq b\} & \\ [a, b] & = & \{x \mid a \leq x \leq b\} & \text{閉区間} \end{array}$$

ここで $a, b \in \mathbf{R}$ または ($-\infty$ および ∞).

有界集合　$A \subset \mathbf{R}$ について

$$\begin{array}{l} A \text{ が上に有界} \ \Leftrightarrow\ \exists M \in \mathbf{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M \quad (M \text{ が上界}) \\ A \text{ が下に有界} \ \Leftrightarrow\ \exists m \in \mathbf{R},\ \forall x \in A,\ m \leq x \quad (m \text{ が下界}) \\ A \text{ が有界} \ \Leftrightarrow\ A \text{ が上に有界} \wedge A \text{ が下に有界} \end{array}$$

A が閉空間に含まれれば，A が有界

$$(\exists m, M \in R,\ A \subset [m, M]) \ \Rightarrow\ A \text{ が有界}$$

数列　自然数に数を対応させたものを数列といい，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書く．$\{a_n \mid 1 \leq n\} \subset \mathbf{Q}$ なら有理数列，$\{a_n \mid 1 \leq n\}$ が有界なら有界数列という．

例　$\{n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界数列ではない．
$\{1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な有理数列．

数列の極限　数列 $\{a_n\}$ がの極限が α(実数または $\infty, -\infty$) であるとは，n が大きくなったときにその極限に限りなく近付くことをいい $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く．

有限な極限 α の場合，$\{a_n\}$ が収束するという．それ以外の場合は発散するという．

$\alpha \in \mathbf{R}$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$

単調数列　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加とは，$\forall n \geq 1,\ a_n \leq a_{n+1}$．単調減少とは，$\forall n \geq 1,\ a_n \geq a_{n+1}$．どちらかであれば，単調数列という．

例　$\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列．

実数の連続性　数直線上の全ての点が実数に対応していると定義したので，数直線上の点列が一点に収束するなら，それに対する実数が存在する．

特に，$\sqrt{2}$ に収束する有理数列が定義できるが，$\sqrt{2}$ は有理点ではないので，その収束を $\mathbf{Q}$ 上で定義できない．

具体的に全ての実数を以下の公理から定義きる．

公理 1 (実数の連続性) $\mathbf{R}$ の有界な単調数列は $\mathbf{R}$ 上に収束する．

無限少数　任意の実数 a を 10 進数の無限少数展開として書ける．

$$a = m.n_1n_2n_3\dots \quad (m \in \mathbf{Z},\ n_i \in \{0\dots 9\}) \qquad a_k = m \pm \sum_{i=1}^{k} n_i 10^{-i} \quad (m < 0 \text{ のとき} -)$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ が有界かつ単調なので，$\lim_{k\to\infty} a_k = a$.

極限の演算

定理 1.1.1 (数列の極限) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta\ (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ とする．そのとき

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$　　(2) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha \quad (c \in \mathbf{R})$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \alpha\beta$　　(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

最大元，最小元　$A \subset \mathbf{R}$ について，$M \in A \wedge \forall x \in A,\ x \leq M$ ならば，$M = \max(A)$ が A の最大元である．同様に $m \in A \wedge \forall x \in A,\ m \leq x$ ならば，$m = \min(A)$ が A の最小元である．A が有界でも，最大限と最小限が存在するとは限らない．

有界な関数，最大値，最小値　$f(x)$ が集合 A で定義された関数とする．f の像 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ が有界また最小元や最大元をもつならば，$f(x)$ は有界な関数，最大値をもつ，最小値をもつという．

$$\max\{f\} = \max_{x\in A} f(x) = \max(f(A)) \qquad \min\{f\} = \min_{x\in A} f(x) = \min(f(A))$$

上限，下限　$A \subset \mathbf{R}$ が空ではなく，上に有界であれば，A の上階の最小元を A の上限といい，$\sup\ A$ と書く．この最小元が必ず存在する．同様に，A が下に有界であれば，下限 $\inf\ A$ が存在する．

また，集合 A で定義された関数 $f(x)$ についても同様の定義がなされる．

$$\sup\ f = \sup_{x\in A} f(x) = \sup\ f(A) \qquad \inf\ f = \inf_{x\in A} f(x) = \inf\ f(A)$$