Jacques Garrigue, 2019年5月29日

# プログラムの証明

## 1　依存和

存在 (∃) は帰納型の特殊な例である．

```
Print ex.
Inductive ex (A : Type) (P : A -> Prop) : Prop :=
    ex_intro : forall x : A, P x -> ex P.
```

ex (fun x:A => P(x)) を exists x:A, P(x) と書いてもいい．

この定義を見ると，ex P $= \exists x, P(x)$ は $x$ と $P(x)$ の対でしかない．対の第2要素に第1要素が現れているので，この積を「依存和」という．(元々依存のある関数型を定義域を添字とした依存積と見なすなら，こちらは $A$ を添字とする直和集合になる)

既に見ているように，証明の中で依存和を構築する時に，exists という作戦を使う．

```
Lemma exists_pred x : x > 0 -> exists y, x = S y.
Proof.
  case x => // n _.                    (* case: x と同じだが項が読みやすい *)
  by exists n.
Qed.
Print exists_pred.
exists_pred =
fun x : nat =>
match x as n return (0 < n -> exists y : nat, n = y.+1) with
| 0 =>
    fun H : 0 < 0 =>
    let H0 : False :=
      eq_ind (0 < 0) (fun e : bool => if e then False else True) I true H in
    False_ind (exists y : nat, 0 = y.+1) H0              (* 0はありえない *)
| n.+1 =>
    fun _ : 0 < n.+1 => ex_intro (fun y : nat => n.+1 = y.+1) n (erefl n.+1)
end                                                 (* n.+1のときnを返す *)
     : forall x : nat, 0 < x -> exists y : nat, x = y.+1
Require Extraction.
Extraction exists_pred.                               (* 何も抽出されない *)
```

上記の ex は Prop に住むものなので，論理式の中でしか使えない．しかし，プログラムの中で依存和を使いたい時もある．この時には sig を使う．

```
Print sig.
Inductive sig (A : Type) (P : A -> Prop) : Type :=
    exist : forall x : A, P x -> sig P.
```

sig (fun x:T => Px) は {x:T | Px} とも書く．ex と同様に，具体的な値は exists で指定する．

こういう条件付きな値を扱う安全な関数が書ける．

```
Definition safe_pred x : x > 0 -> {y | x = S y}.
  case x => // n _.                                (* exists_predと同じ *)
  by exists n.                                  (* こちらも existsを使う *)
Defined.                          (* 定義を透明にし，計算に使えるようにする *)
```

証明された関数を OCaml の関数として輸出できる．その場合，Prop の部分が消される．

```
Require Extraction.
Extraction safe_pred.
(** val safe_pred : nat -> nat **)
let safe_pred = function
  | O -> assert false (* absurd case *)
  | S x' -> x'
```

## 2 Hint と auto

証明が冗長になることが多い．auto は簡単な規則で証明を補完しようとする．具体的には，auto は 仮定や Hint lem1 lem2 ... で登録した定理を apply で適用しようとする．これらを組み合わせて，深さ 5 の項まで作れる (auto $n$ で深さ $n$ にできる)．info_auto で使われたヒントを表示させる事もできる．

Hint Constructors で帰納型を登録すると，各構成子が定理として登録される．また，auto using lem1, lem2, ... で一回だけヒントを追加することもできる．

auto で定理が適用されるために，全ての変数が定理の結論に現れる必要がある．eauto を使うと simple apply が eapply に変わるので，決まらない変数が変数のまま残せる．その代わり，可能な導出木が増えるので，探索が中々終わらない場合もある．

## 3 整列の証明

```
Section Sort.
  Variables (A:Set) (le:A->A->bool).          (* データ型 A とのその順序 le *)

  (* 既に整列されたリスト l の中に a を挿入する *)
  Fixpoint insert a (l: list A) :=
    match l with
    | nil => (a :: nil)
    | b :: l' => if le a b then a :: l else b :: insert a l'
    end.

  (* 繰り返しの挿入でリスト l を整列する *)
  Fixpoint isort (l : list A) : list A :=
    match l with
    | nil => nil
    | a :: l' => insert a (isort l')
    end.

  (* le は推移律と完全性をみたす *)
  Hypothesis le_trans: forall x y z, le x y -> le y z -> le x z.
  Hypothesis le_total: forall x y, ~~ le x y -> le y x.

  (* le_list x l : x はあるリスト l の全ての要素以下である *)
  Inductive le_list x : list A -> Prop :=
    | le_nil : le_list x nil
    | le_cons : forall y l,
        le x y -> le_list x l -> le_list x (y::l).

  (* sorted l : リスト l は整列されている *)
  Inductive sorted : list A -> Prop :=
```

```
    | sorted_nil : sorted nil
    | sorted_cons : forall a l,
        le_list a l -> sorted l -> sorted (a::l).

  Hint Constructors le_list sorted.                    (* auto の候補にする *)

  Lemma le_list_insert a b l :
    le a b -> le_list a l -> le_list a (insert b l).
  Proof.
    move=> leab; elim => {l} [|c l] /=. info_auto.
    case: ifPn. info_auto. info_auto.
  Qed.

  Lemma le_list_trans a b l :
    le a b -> le_list b l -> le_list a l.
  Proof.
    move=> leab; elim. info_auto.
    info_eauto using le_trans.                     (* 推移律は eauto が必要 *)
  Qed.

  Hint Resolve le_list_insert le_list_trans.          (* 補題も候補に加える *)

  Theorem insert_ok a l : sorted l -> sorted (insert a l). Admitted.
  Theorem isort_ok l : sorted (isort l). Admitted.

  (* Permutation l1 l2 : リスト l2 は l1 の置換である *)
  Inductive Permutation : list A -> list A -> Prop :=
    | perm_nil: Permutation nil nil
    | perm_skip: forall x l l',
        Permutation l l' -> Permutation (x::l) (x::l')
    | perm_swap: forall x y l, Permutation (y::x::l) (x::y::l)
    | perm_trans: forall l l' l'',
        Permutation l l' ->
        Permutation l' l'' -> Permutation l l''.

  Hint Constructors Permutation.

  Theorem Permutation_refl l : Permutation l l. Admitted.
  Theorem insert_perm l a : Permutation (a :: l) (insert a l). Admitted.
  Theorem isort_perm l : Permutation l (isort l). Admitted.

  (* 証明付き整列関数 *)
  Definition safe_isort l : {l'|sorted l' /\ Permutation l l'}.
    exists (isort l).
    auto using isort_ok, isort_perm.
  Defined.
  Print safe_isort.
End Sort.

Check safe_isort.                     (* le と必要な補題を与えなければならない *)
Extraction leq.                          (* mathcomp の eqType の抽出が汚ない *)

Definition leq' m n := if m - n is 0 then true else false.
Extraction leq'.                                         (* こちらはすっきりする *)
```

```
Lemma leq'E m n : leq' m n = (m <= n).
Proof. rewrite /leq' /leq. by case: (m-n). Qed.

Lemma leq'_trans m n p : leq' m n -> leq' n p -> leq' m p.
Proof. rewrite !leq'E; apply leq_trans. Qed.

Lemma leq'_total m n : ~~ leq' m n -> leq' n m. Admitted.

Definition isort_leq := safe_isort nat leq' leq'_trans leq'_total.

Eval compute in proj1_sig (isort_leq (3 :: 1 :: 2 :: 0 :: nil)).
     = [:: 0; 1; 2; 3] : seq nat

Extraction "isort.ml" isort_leq.
```

**練習問題 3.1** *1.* `Admitted` を `Proof` に変え，証明を完成させよ．

*2.* `le_list` を以下のように一般化できる．

```
Inductive All (P : A -> Prop) : list A -> Prop :=
  | All_nil : All P nil
  | All_cons : forall y l, P y -> All P l -> All P (y::l).
```

このとき，`All (le a) l` が `le_list a l` と同じ意味になる．

こちらを使うように証明を修正せよ．