

レポート課題 (1月19日提出)

Jacques Garrigue, 2016年12月22日

問1 以下のベクトル空間 W_1, W_2, W_3 の基と次元を求めよ.

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ W_2 &= \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \\ W_3 &= W_1 \cap W_2 \end{aligned}$$

問2 以下の行列が対角化可能かどうかを調べ, 可能なとき変換行列と対角行列を示せ.

$$(1) \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

問3 次の線形変換 $T: \mathbf{R}[x]_2 \rightarrow \mathbf{R}[x]_2$ に対して, T の固有値と各固有値の固有空間の基を求めよ.

$$(1) T(f(x)) = f'(x^2) \quad (2) T(f(x)) = 2f(x) + xf'(x) + x^2 f''(x)$$

問4 実交代行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ において,

$$a > 0, b > 0, a^2 + b^2 = 1$$

とする.

- (1) 行列 A の複素数体 \mathbf{C} における固有値と各固有空間の基を求めよ.
- (2) A^n を計算せよ.

問5 有限次元空間の線形変換 T の全ての固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ とする. 自然数 $n \geq 1$ について

$$nT(\vec{x}) = T(n\vec{x}) \quad T^n(\vec{x}) = \begin{cases} T(\vec{x}) & (n = 1 \text{ のとき}) \\ T^{n-1}(T(\vec{x})) & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

という2つの線形変換 nT と T^n を定義する.

nT と T^n の固有値を求め, その根拠を与えよ.