

レポート課題 (11月10日提出)

Jacques Garrigue, 2017年10月27日

問1 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ が線形独立であるとき, $\vec{x}_1, \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n$ も線形独立であることを示せ.

問2 $W = \{f(x) \in \mathbf{R}[x]_3 \mid x^2 f''(x) - 2x f'(x) + 2f(x) = 0\}$ が部分空間であることを確認し, その次元を計算せよ.

問3 次のベクトルの1次独立な最大個数とその具体的なベクトルを与え, 残りのベクトルをその1次結合として表現せよ.

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

問4 次のベクトル空間 W の次元と1組の基を求めよ.

$$(1) W = \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^5 \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0} \right\}$$

$$(2) W = \{f(x) \in \mathbf{R}[x]_3 \mid f(2) = 2f(1)\}$$

$$(3) W = \{f(x) \in \mathbf{R}[x]_3 \mid f(2) = 2f(1), f''(2) = 2f''(1)\}$$

問5 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($a_n \in \mathbf{R}$) に対して足し算 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ とスカラー倍 $c\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定義する.

(1) これがベクトル空間であることを示せ.

(2) このベクトル空間の基を与えよ. ただし基のベクトルの数が有限とは限らない.

(3) このベクトル空間の次元を求めよ.