# レポート課題 (7月14日提出)

Jacques Garrigue, 2017 年 7 月 7 日

**問 1**　次の $n$ 次正方行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \iddots & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

**問 2**

(1) $A$ と $B$ が正則行列なら, $\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right]$ の逆行列が $\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & D \\ \hline O & B^{-1} \end{array}\right]$ として書けることを示せ (そのときの $D$ を求めよ).

(2) それを使って, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$ を計算せよ.

**問 3**　$E + A$ が正則行列であるような行列 $A$ に対して, $B = (E - A)(E + A)^{-1}$ とおくとき

(1) $E + B$ は正則行列であることを示せ.

(2) $A = (E - B)(E + B)^{-1}$ を示せ.

**問 4**　$n$ 文字の置換全体の集合を $S_n$ とするとき, 次を証明せよ.

(1) $\sigma$ が $S_n$ 全体を重複なく動くとき, $\sigma^{-1}$ も $S_n$ 全体を重複なく動く. すなわち, $S_n$ から $S_n$ への関数 $f(\sigma) = \sigma^{-1}$ が全単射である.

(2) $\tau \in S_n$ に対して, $\sigma$ が $S_n$ 全体を重複なく動くとき, $\sigma\tau$ も $\tau\sigma$ も $S_n$ 全体を重複なく動く. すなわち, $S_n$ から $S_n$ への関数 $f(\sigma) = \sigma\tau$ および $g(\sigma) = \tau\sigma$ は全単射である.

**問 5**　次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & -3 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

(4) $\det(kA)$　($\det(A)$ を用いて)　(5) $\begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n & x \end{vmatrix}$ ($x$ の多項式として)