置換

Jacques Garrigue, 2017 年 6 月 23 日

置換　n 個の文字 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の順番を入れ替える関数を置換という.

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_m \\ b_1 & \ldots & b_m \end{pmatrix}$$

は a_i を b_i に変える ($\sigma(a_i) = b_i$ $(1 \leq i \leq m)$) という置換である. ただし $\{a_i \mid 0 \leq i \leq m\} = \{b_i \mid 0 \leq i \leq m\}$. 置換に含まれない文字は動かない.

置換の列の位置を変えても関数が変わらないので, 動かない文字を加えると σ は必ず次ぎのように書ける.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ k_1 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$$

例　$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ は $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$ という置換.

置換の積　関数同様に置換の合成ができる. 2 つの n 文字の置換 (σ, τ) の積 $\sigma\tau$ は以下のように定義する

$$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) \quad (1 \leq i \leq n)$$

単位置換, 逆置換　何も動かさない置換を $\epsilon = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$ と書く. また置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ k_1 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$ に対する逆置換は

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & \ldots & k_n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

このとき, $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \epsilon$.

巡回置換　$\{1, \ldots, n\}$ のうち $k_1, \ldots, k_n$ だけを動かして, 一個ずつずらす置換 $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & \ldots & k_{n-1} & k_n \\ k_2 & \ldots & k_n & k_1 \end{pmatrix}$ を巡回置換といい, $\sigma = (k_1 \ \ldots \ k_n)$ と書く.

例　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ を巡回置換の積として表せ.

互換　巡回置換のうち特に 2 文字の巡回置換 $(i \ j)$ を互換という. 任意の巡回置換は

$$(k_1 \ k_2 \ \ldots \ k_r) = (k_1 \ k_r) \ldots (k_1 \ k_2)$$

と表せるので, 任意の置換が互換の積として表せる.

置換の符号　置換 σ が m 個の互換の積として定義できるとき, σ の符号を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

と定める. 互換の選び方は一定ではないが, 符号はそれによらない.
$\mathrm{sgn}(\epsilon) = (-1)^0 = 1$. また, 定義から $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$ なので, $\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\epsilon) = 1$, すなわち $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

偶置換, 奇置換　$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ なら σ は偶置換, $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ なら奇置換という.

例　前の例の置換の符号を求めよ.

置換全体の集合　n 文字の置換全体を S_n と書く. n 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix}$ は $k_1, \dots, k_n$ が定まれば一位に決まるので, S_n の限の個数は $n!$ である.

15 パズル　15 の駒を以下の様に並べることを目的とするパズルがある.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & \text{空} \end{bmatrix}$$

ただし, 各ステップで空白を縦か横隣と交換できるのみである.
このルールを適用すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & \underline{15} & \underline{14} & \text{空} \end{bmatrix}$$

から勝利できないことを示す.
空白を 16 として見て, 盤面の状態行列を $[a_{ij}]$ とすると,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

を状態置換とする. $\sigma = \epsilon$ のとき終了となる.
各ステップでの空白の位置を (i, j) とる. そのときに盤面の偶奇を以下に定義する.

$$(-1)^{i+j}\mathrm{sgn}(\sigma)$$

各動きを調べると, 偶奇が変わらないことが確認できる. 結果的には, 偶奇の異なる盤面から優勝できないことが分かる. そして, 14 と 15 を交換することは互換 (14 15) に当たるので, 空白が変わらずに偶奇が変わる.