

行列の簡約化

Jacques Garrigue, 2017 年 6 月 2 日

簡約な行列

主成分 ある行の中で 0 でない最初の成分を主成分という. 行ベクトル $\vec{a} = [a_1 \dots a_i \dots a_n]$ において, a_i が \vec{a} の主成分とは, $a_i \neq 0$ かつ $a_j = 0$ ($j < i$) ということになる.

簡約な行列 ある行列 $A = [a_{ij}]$ が簡約というには, 以下の条件を満たさなければならない.

- (I) 零ベクトルでない行の主成分が 1 である.
- (II) 各行の先頭の 0 の数が増えて行く. すなわち, 零ベクトルの下に零ベクトルしかなくて, 行 i の主成分が a_{ik_i} ならば $a_{jk} = 0$ ($j > i, k < k_i$).
- (III) 主成分を含む列ベクトルの他の成分は全て 0 である.

例 簡約な行列の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例題 次の行列が簡約でない理由を考え, 基本変形により簡約な行列に変形せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列の簡約化 以下の手続きによって, 任意の行列を簡約な行列に変形できる.

- (1) 零ベクトルでない各行を主成分で割る. (I) が満たされる.
- (2) 主成分の位置の順に行を並べ変える. (II) が満たされる.
- (3) 同じ主成分の行が複数ある場合, 上の行をそれ以降の行から引き, (1) に戻る.
- (4) ある行の主成分 $a_{ik_i} = 1$ の上に 0 でない成分 a_{jk_i} ($j < i$) が残っている場合, j 行目から i 行目の a_{jk_i} 倍を引く.
大きな i から始め, なくなるまで繰り返す. 終わると (III) が満たされる.

例題 上記の簡約化手続きを使い次の行列を簡約な行列に変形せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

定理 2.2.1 任意の行列は基本変形を繰り返すことにより簡約化できる. また, 与えられた行列の簡約化は唯一通り定まる.

行列の階数 行列 A の簡約化を B とするとき,

$$\text{rank}(A) = B \text{ の零ベクトルでない行の個数}$$

とおき A の階数という. 簡約な行列の各行の主成分は全て異なる列に属するから

$$\text{rank}(A) = B \text{ の行の主成分を含む列の個数}$$

でもり, 従って

定理 2.2.2 A が $m \times n$ 行列ならば, $\text{rank}(A) \leq m$ かつ $\text{rank}(A) \leq n$.

例題 次の行列の階数を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

連立 1 次方程式を解く

前に見たように, n 変数の連立 1 次方程式は係数行列 A を使い, $A\vec{x} = \vec{b}$ という形で表現できる.

また, 拡大係数行列を使うと, $[A | \vec{b}] \begin{bmatrix} \vec{x} \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{o}$ となる.

ここで, 拡大係数行列の簡約化 C を考える. C の最後の列を除いた行列が A の簡約化でもあることに注目する (簡約化の結果が唯一なので, 簡約化手続きが最初の n 列について動作が変わらないことを確認すればいい).

- C が A の簡約化を含むので, $\text{rank}([A | \vec{b}]) < \text{rank}(A)$ はありえない.
- もしも $\text{rank}([A | \vec{b}]) = \text{rank}(A)$ ならば, 元の連立 1 次方程式が $\text{rank}(A)$ 個の連立 1 次方程式と同値であり, 主成分以外の変数の値を選ぶことにより, それぞれの方程式が独立した解を持つ.
- もしも $\text{rank}([A | \vec{b}]) > \text{rank}(A)$ ならば, 列が一個しか増えていないので, $\text{rank}([A | \vec{b}]) = \text{rank}(A) + 1$. そして, 0 でない最後の行が最後の列だけが 0 ではないので, 解がない.

定理 2.3.1 連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ が解を持つ必要十分条件は

$$\text{rank}([A | \vec{b}]) = \text{rank}(A)$$

例題 次の連立 1 次方程式を解け.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解の自由度 連立 1 次方程式が解を持つとき, 簡約な行列の形を見ると, 主成分を含まない列に当たる変数について, どんな値を決めても解が存在する. そういう変数の数を解の自由度と呼ぶ. 階数の定義から, 係数行列 A が $m \times n$ 行列とすると, 解の自由度は

$$n - \text{rank}(A)$$

逆に, 解の自由度が 0 ならば, 解は一つしか存在しない.

定理 2.3.2 n 変数の連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ に解が唯一存在する必要十分条件は

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A | \vec{b}]) = n$$