空間図形 (3)

Jacques Garrigue, 2017 年 5 月 19 日

ベクトルの内積

内積　2 つのベクトル $\vec{a} = \vec{AB}$ と $\vec{b} = \vec{AC}$ に対して, $\theta = \angle BAC$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**なす角**という. $\vec{a}, \vec{b}$ に対して一意的に定まる実数

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta$$

を $\vec{a}, \vec{b}$ の**内積**または**スカラー積**という.

定理 4　(i) $(\vec{a}, \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$

(ii) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

(iii) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$

(iv) $(k\vec{a}, \vec{b}) = k(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, k\vec{b})$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\theta = \pi/2$ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**直交**するといい, $\vec{a} \perp \vec{b}$ と表す.

定理 5　(i) $\vec{a} \perp \vec{b}$ のとき $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

(ii) $|(\vec{a}, \vec{b})| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$　　シュワルツの不等式

直交座標系と内積　互いに直交する大きさ 1 のベクトルから作られる基底を**正規直交基底**といい, 正規直交基底を基本ベクトルとする座標系を**直交座標系**という.

定理 6 平面の場合

(i) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ が正規直交基底 $\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1 \quad (i = 1, 2) \\ (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0 \end{cases}$

(ii) 正規直交基底 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ において, $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, α, β は $\vec{a}, \vec{b}$ と $\vec{e}_1$ のなす角, $\theta = \beta - \alpha$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角ならば,

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}) &= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos(\beta - \alpha) = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ &= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}\frac{b_1}{\|\vec{b}\|} + \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}\frac{b_2}{\|\vec{b}\|}) = a_1b_1 + a_2b_2 = {}^t\vec{a}\,\vec{b}\end{aligned}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \Leftrightarrow {}^t\vec{a}\,\vec{b} = 0$$

(iii) 直交座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ に関して, 点 $P(x_1, y_1)$ から点 $Q(x_2, y_2)$ までの距離は

$$\overline{PQ} = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

定理 4 の証明　(平面の場合)
(iii) 以外は内積の定義から自明. (iii) は $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$ から証明できる.

定理 7 空間の場合

(i) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ が正規直交基底 $\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1 & (i = 1, 2, 3) \\ (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 & (i \neq j) \end{cases}$

(ii) 正規直交基底 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ において, $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角ならば,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = {}^t\vec{a}\,\vec{b} \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^2}} \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = 0 \Leftrightarrow {}^t\vec{a}\,\vec{b} = 0$$

(iii) 直交座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ に関して, 点 $P(x_1, y_1, z_1)$ から点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ までの距離は

$$\overline{PQ} = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

法線ベクトル 平面上の直線または空間内の平面と直交するベクトルを, その直線または平面の**法線ベクトル**という.

定理 8 (i) 直線：$ax + by = c$ に対して, $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ は法線ベクトルである.

(ii) 平面：$ax + by + cz = d$ に対して, $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ は法線ベクトルである.

証明 直線 (l) 上の 2 点 $P(x_1, y_1)$ と $Q(x_2, y_2)$. 直線の方程式から

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 = c \\ ax_2 + bx_2 = c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0.$$

内積 $(\vec{n}, \vec{PQ}) = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$ になるので, $\vec{n}$ と $\vec{PQ}$ が直交している.

平面 (π) 上の任意の 2 点 $P(x_1, y_1, z_1)$ と $Q(x_2, y_2, z_2)$ について同じ計算ができ, $(\vec{n}, \vec{PQ}) = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$ から $\vec{n}$ と $\vec{PQ}$ が直交していることが分かる.

例 平行四辺形の面積

(i) 平行四辺形 ABCD の面積が $S = \sqrt{\|\vec{AB}\|^2\|\vec{AD}\|^2 - (\vec{AB}, \vec{AD})^2}$ であることを示せ.

(ii) 直交座標系に関して, $\vec{AB} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{AD} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ならば $S = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ を示せ.

練習問題

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が正規直交基底であることを示せ.

(ii) 3 点 $A(1, 3, -1), B(2, 6, 1), C(-1, 4, 2)$ を頂点とする三角形について, $\angle BAC$ の値および $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

(iii) 二つの平面 $\pi_1 : 2x - y + z = 1, \pi_2 : x + y + z = -1$ に直交し, かつ, 点 $(1, 0, -2)$ を通る平面 π の方程式を求めよ.