

空間図形 (2)

Jacques Garrigue, 2017 年 5 月 12 日

座標形と方程式

線形独立・線形従属 n 個のベクトル $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ について, それぞれが残りのベクトルの線形結合として表せないとき, そのベクトル達が線形独立だという. 逆に, 残りのベクトルの線形結合として表せるベクトルがある場合, 線形従属だという.

例

$$(i) \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ が空間の基底であることを示せ.}$$

$k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{o}$ が $(0, 0, 0)$ 以外の解を持たないことを示せばいい.

$$(ii) \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ を上の } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ の線形結合として表せ.}$$

$k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{x}$ の解を見つけなければいい.

座標系と点の座標 平面 (空間) の基底に一つの定点 O を加えると, 平面 (空間) の座標系 $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ が得られる. O は原点, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ は基本ベクトルという. 任意の点 A について, \vec{OA} の成分が A の座標になる.

直線 点 \vec{p} を通って方向ベクトルが \vec{a} の直線 (l) は, (l) 上の任意の点を \vec{x} とするとき,

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{a} \quad (-\infty < t < \infty)$$

と表される. これを直線 (l) のベクトル表示という.

定理 2 (i) $\vec{p} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \vec{a} = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすれば, 直線 (l) の方程式は

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases} \quad \text{または} \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

(ii) $\vec{p} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \vec{a} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とすれば, 直線 (l) の方程式は

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \quad \text{または} \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

ただし, 分母が 0 のときは分子も 0 とする.

平面 点 \vec{p} を通って線形独立な2つのベクトルが \vec{a} と \vec{b} で張られる平面 (π) は, (π) 上の任意の点を \vec{x} とするとき,

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{a} + s\vec{b} \quad (-\infty < t, s < \infty)$$

と表される. これを平面 (π) のベクトル表示という.

定理 3 $\vec{p} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とすれば, 平面 (π) の方程式は

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 + sb_1 \\ y = y_0 + ta_2 + sb_2 \\ z = z_0 + ta_3 + sb_3 \end{cases}$$

または, s, t を消去した1次方程式によって

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

と表される.

例

- (i) 2点 $A(-1, 3, 2)$, $B(2, 5, 1)$ を通る直線の方程式を求めよ.
- (ii) $C(1, 1, 0)$ を通って, (i) の直線を含む平面の方程式を求めよ.

問の解答 3角形 ABC の辺 AB , AC を $m:n$ に内分する点をそれぞれ M , N とするとき, MN と BC が並行であることを示せ.

$$\text{内分点のベクトル表示より } \vec{AM} = \frac{m\vec{AB}}{m+n}, \vec{AN} = \frac{m\vec{AC}}{m+n},$$

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = \frac{m}{m+n}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{m}{m+n}\vec{BC}$$

よって, MN と BC は並行である.