空間図形

Jacques Garrigue, 2017 年 4 月 28 日

幾何ベクトル　空間の二つの線分 $\vec{AB}$ と $\vec{CD}$ の向きと長さが同じときに, その二つが幾何ベクトルとして等価であるといい, $\vec{AB} = \vec{CD}$ と書く. 線分を書かずに, 幾何ベクトルを名前で指すこともできる $\vec{a} = \vec{AB}$. 長さ 0 のベクトル $\vec{o} = \vec{AA}$ は向きを持たず, 零ベクトルという.

幾何ベクトルの和と差　二つの幾何ベクトルが $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ と表せたとき, その和が $\vec{AC}$ になる. 同様に $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$. 特に $-\vec{AB} = \vec{AA} - \vec{AB} = \vec{BA}$, 同じ長さで向きが逆のベクトル.

幾何ベクトルの実数倍　ベクトル $\vec{a}$ と同じ向きで長さが k 倍 (k は正の実数) の幾何ベクトルを $k\vec{a}$ と書く. 特に $0\vec{a} = \vec{o}$. また, 負の実数に関して, $(-k)\vec{AB} = k(-\vec{AB}) = k\vec{BA}$.

幾何ベクトルの性質　幾何ベクトルは数ベクトルと同じ性質を持っている. 特に和の性質・スカラー倍の性質・分配率がそのまま利用できる.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \quad \vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$$
$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b} \quad (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a} \quad (kl)\vec{a}=k(l\vec{a}) \quad 1\vec{a}=\vec{a} \quad 0\vec{a}=\vec{o}$$

ベクトルの並行　零でない二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が並行であることは, $\vec{a} = k\vec{b}$ となるような k が存在することと等価である.

位置ベクトル　基点 O を定めると, 任意の点 A をベクトル $\vec{OA}$ として表すことができる. 逆に「点 $\vec{a}$」という表現は位置ベクトル $\vec{a}$ が定める点を指す.

例 (内分点・外分点)　2 点 $\vec{a}, \vec{b}$ に対して, $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に至る線分を $m : n$ の比に

(i) 内分する点の位置ベクトルは $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$,

(ii) 外分する点の位置ベクトルは $\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ (ただし $m \neq n$).

問　3 角形 ABC の辺 AB, AC を $m : n$ に内分する点をそれぞれ M, N とするとき, MN と BC が並行であることを示せ.

線形結合　n 個の幾何ベクトル $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ が与えられた時, あるベクトル $\vec{b}$ が $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n$ として表現できたとき, $\vec{b}$ は $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ の線形結合だと言う.

基底　n 個の幾何ベクトル $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ について, 任意の幾何ベクトル $\vec{a}$ が $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ の線形結合で, かつ全ての i について $\vec{e}_i$ が $\vec{e}_i$ 以外の $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ の線形結合でなければ, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ は**基底**である. $n = 2$ のときは平面の基底, $n = 3$ のとおきは空間の基底という.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n$$

から得られた $(a_1,\ldots,a_n)$ を $\vec{a}$ の**成分**という. $\vec{a}$ とその各成分から作った列ベクトルを同一視できる.

$$\vec{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

定理 1 (成分の一意性) もしも $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+\ldots+a_n\vec{e}_n$ かつ $\vec{a}=a'_1\vec{e}_1+\ldots+a'_n\vec{e}_n$ ならば, $a_i=a'_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

証明 簡単のために, $a_1\neq a'_1$ と仮定する. 和と実数倍の性質から, $(a_1-a'_1)\vec{e}_1=(a_2-a'_2)\vec{e}_2+\ldots+(a_n-a'_n)\vec{e}_n$ となるので,

$$\vec{e}_1=\frac{1}{a_1-a'_1}\left[(a_2-a'_2)\vec{e}_2+\ldots+(a_n-a'_n)\vec{e}_n\right]$$

これが基底の定義と矛盾するので, 全ての成分が同じでなければならない.

数ベクトルの性質　上記の幾何ベクトルの性質を使えば, 幾何ベクトルの演算が数ベクトル上でもできることが分かる.

$$\vec{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},\vec{b}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},k\in\mathbf{R}\text{ ならば }\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix},k\vec{a}=\begin{bmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$

問題の解答

1.2.6 $(E-A)(E+A+\ldots+A^{m-1})=(E-A)\sum_{i=0}^{m-1}A^i=\sum_{i=0}^{m-1}EA^i-\sum_{i=0}^{m-1}AA^i=\sum_{i=0}^{m-1}A^i-\sum_{i=1}^{m}A^i=E-A^m=E$

1.3.1 $A_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},A_{22}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},B_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},B_{22}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & E \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & E \\ \hline O & B_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} & A_{11}+B_{22} \\ \hline O & A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

1.3.5 $\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{bmatrix}$ を k に関する帰納法で証明する.

- $k=0$ のとき $\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^0=E_{m+n}=\begin{bmatrix} E_m & 0A \\ O & E_n \end{bmatrix}^k$
- k+1 のとき $\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_m & kA \\ O & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix} E_m & E_mA+kAE_n \\ O & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_m & (k+1)A \\ O & E_n \end{bmatrix}$