線形代数学 I–2

行列の意味と構造

Jacques Garrigue, 2017 年 4 月 21 日

線形写像

行列の最も一般的な解釈は，ベクトルの上の線形性を満たした関数である．

線形性　加算とスカラー倍が定義されている集合 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の間の関数 f がが線形性を満たすとは，任意の $\mathbf{A}$ の元 u と v およびスカラー c について以下の二つの等式が成り立つことである．

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$f(c \cdot u) = c \cdot f(u)$$

行列の写像　$\mathbf{K}$ を体 (実数や複素数など) とする．そのとき，$\mathbf{K}$ 上の $m \times n$ 行列 A が $\mathbf{K}^n$(すなわち $\mathbf{K}$ の n 組) から $\mathbf{K}^m$(すなわち $\mathbf{K}$ の m 組) への以下の線形写像 f を定義する．

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbf{K}^n & \to & \mathbf{K}^m \\ & \vec{u} \in \mathbf{K}^n & \mapsto & A\vec{u} \in \mathbf{K}^m \end{array}$$

逆に，任意の $\mathbf{K}^n$ から $\mathbf{K}^m$ への線型写像に対して，その母体となる $m \times n$ 行列が存在する．

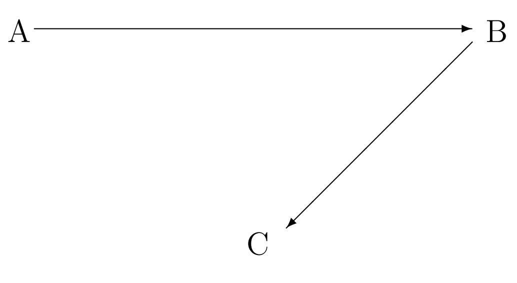
例　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の線型写像は以下の関数 $f : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^2$ である．

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

グラフと隣接行列

前回, 例としてグラフを紹介したが, もう少し形式的に説明する.

グラフ　$G = (V, E)$ は頂点の集合 V(vertices) と辺の集合 E(edges) からできている. E は V 上の二項関係である (頂点の対の集まり). E が対称的であれば G は無向グラフといい, そうでなければ有向グラフという.



上記のグラフを $(\{A, B, C\}, \{(A, B), (B, C)\})$ と表現できる.

隣接行列　各行と列に V の頂点を割り当て, i 番目と j 番目の頂点が辺で結ばれている場合には成分 ij を 1 とし, そうでなければ 0 とする行列を隣接行列という.

$$A = 1, B = 2, C = 3 \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

G が無向グラフであれば, M は対称行列になる.

また, M^n の i, j 成分は i 番目の頂点から j 番目の頂点まで行く n ステップの道のりの数になる. たとえば, M^2 の $1, 3$ 成分が 1 なので, A から C まで 2 ステップで行けることが分かる.

さらに, M が冪零行列なら, G が循環を含めないことも分かる.

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行列の分割

分割　計算や証明を簡単にするために, 行列を縦横に小さな行列に分割することができる. 各行列の幅と高さが縦と横で揃っていなければならない.

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1t} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2t} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{st} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{rl} \text{各行の高さ：} & m_1, m_2, \ldots, m_s \\ \text{各列の幅：} & n_1, n_2, \ldots, n_t \\ A_{ij}\text{：} & m_i \times n_j\text{型} \\ A\text{：} & \sum m_i \times \sum n_j\text{型} \end{array}$$

例　$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 5 & 3 & -9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{221} & A_{22} \end{array}\right] \qquad A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_{21} = [5 \;\; 3], A_{22} = [-9]$$

分割行列の和と差　同じように分割されている二つの行列の和と差は小行列ごとにすればいい.

$$[A_{ij}] + [B_{ij}] = [A_{ij} + B_{ij}] \qquad [A_{ij}] - [B_{ij}] = [A_{ij} - B_{ij}]$$

分割行列の積　A の横の分割と B の縦の分割が同じならば, A と B の積を小行列ごとに行うことができる.

$$AB = [A_{ij}][B_{jk}] = [C_{ik}]$$

$$A_{ij} : m_i \times n_j\text{型} \quad B_{jk} : n_j \times r_k\text{型} \quad C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + \ldots + A_{it}B_{tk} : m_i \times r_k\text{型}$$

例　A_1, B_1 が m 次正方行列, A_2, B_2 が n 次正方行列ならば

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_1 & O \\ \hline O & B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 & O \\ \hline O & A_2B_2 \end{array}\right]$$

例　A が $m\times n$ 行列のとき

$$[E_m \mid -A]\left[\begin{array}{c} A \\ \hline E_n \end{array}\right] = E_mA - AE_n = A - A = O_{m,n}$$

ベクトル分割　A が $m\times n$ 行列ならば, それを m 個の行ベクトルか n 個の列ベクトルに分割することができる.

$$A = [\ \mathbf{c}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{c}_n\ ] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_m \end{array}\right]$$

例　$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = [\ \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2\ ] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{r}_2 \end{array}\right]$　　$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \mathbf{r}_1 = [1\ 2], \mathbf{r}_2 = [3\ 4],$

ベクトル分割による積の表現　A が $m\times n$ 行列, B が $n\times r$ 行列のとき

$$AB = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_m \end{array}\right][\ \mathbf{b}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{b}_r\ ] = [\mathbf{a}_i\mathbf{b}_k]_{m\times r} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \ldots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}_1 & \ldots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_r \end{bmatrix}$$

問題 1.1.4〜1.1.8, 1.2.2 の解答

問 4(2)

$$\begin{bmatrix} d & a-1 \\ b+2 & 1 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} 2 & a \\ 2b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2b \\ a & c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a-1 = 2b \\ b+2 = a \\ 1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = 1 \\ b+1 = 2b \\ a = b+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = 1 \\ b = 1 \\ a = 3 \end{cases}$$

問 5(1)

$${}^tA = A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2c+1 & -2 & a-2 \\ 3 & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2c+1 & 3 \\ a & -2 & c \\ b & a-2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c+1 \\ b = 3 \\ a-2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c+1 \\ b = 3 \\ 2c-1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

対称性より, 上の三角だけを見ればいい.

問 6

$${}^tA = -A \Leftrightarrow {}^t[a_{ij}] = -[a_{ij}] \Leftrightarrow [a_{ji}] = [-a_{ij}] \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow a_{ii} = 0$$

問 7(1)

$${}^tA = -A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 2c+1 & b-2 & d-2 \\ 3 & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2c-1 & -3 \\ -a & 2-b & -c \\ -c & 2-d & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c-1 \\ c = -3 \\ b-2 = 0 \\ d-2 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \\ c = -3 \\ d = 5 \end{cases}$$

対称性より, 上の三角だけを見ればいい.

問 8

$$\begin{cases} {}^tA = A \\ {}^tA = -A \end{cases} \Rightarrow A = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ij}\ (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n) \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = O$$

問 1.2.2

$A : 3 \times 2$ 型, $B : 3 \times 2$ 型, $C : 1 \times 3$ 型, $D : 2 \times 2$ 型.
可能な組合せは，結合部分が 1 のとき AC，2 のとき BD，3 のとき CA と CB だけ.

$$AC = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad BD = \begin{bmatrix} 4 & 17 \\ 7 & 16 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad CA = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, CB = \begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix}$$