固有値と対角化

Jacques Garrigue, 2017 年 12 月 15 日

対角化

同値な行列　同じ線形変換を表現する行列を同値という．具体的には，A と B を n 次正方行列とすると，ある正則行列 P により $B = P^{-1}AP$ ならば A と B が同値である．

行列の対角化　A と同値な対角行列 $B = P^{-1}AP$ を求めることを対角化という．P が実数行列なら A が実数上対角化可能で，P が複素数行列なら A が複素数上対角化可能という．

一般的には，全ての行列が対角化可能ではない．

例題　$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ のとき，$P^{-1}AP$ が対角行列であることを確認し，これを用いて A^n を計算せよ．

定理 5.4.1 T がベクトル空間 V の線形変換で，$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ はその固有値とすると，

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i; T)) \leq \dim(V)$$

証明　固有値の Vandermonde 行列式が 0 でないことを用いて，相異なる固有空間のベクトルの非自明な 1 次関係が存在しないことを証明する．

定理 5.4.2 A が n 次の実数正方行列で，A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ とする．A が $\boldsymbol{R}$ 上対角化される必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i; T)) = n$$

証明　(必要) $B = P^{-1}AP$ で T_A が対角化可能とする．そのときに P の各列ベクトルが T_A の固有ベクトルであり，それぞれの固有値に分類できる．P は正則行列なので，その列ベクトルが 1 次独立で，各固有空間の次元の和が n になる．

(十分) $\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i; T_A)) = n$ とすると，各固有空間の基を集めると，n 個のベクトル $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ が得られる．定理 5.4.1 の証明で分かるように，その n 個のベクトルが 1 次独立で，$\boldsymbol{R}^n$ の基をなす．T_A の $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ に関する表現行列 B が対角行列で，$B = U^{-1}AU$ となる．

系 5.4.1 A が n 次の実数正方行列で，A の相異なる固有値が n 個あれば，A が対角化可能．

証明　各固有空間の次元が 1 以上なので，前の 2 つの定理より．

例題　$A = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ を対角化せよ．

例題　$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ が対角化可能かどうかを調べよ．

複素数体上の対角化　n 次の実数正方行列 A が $\boldsymbol{R}$ 上で対角化ができなくても，複素数体 $\boldsymbol{C}$ で対角化できる可能性もある．そのときの対角化可能性の条件は実数の場合と同じで，

$$A \text{ が } \boldsymbol{C} \text{ 上で対角化できる} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i; T_A)) = n$$

対角化の計算も同様にできる．

宿題の回答

問題 5.3.3　(1)

$$\begin{aligned} g_{T_A}(t) &= \left| tE - \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 6 & -5 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} t-5 & 4 & 2 \\ -6 & t+5 & 2 \\ -3 & 3 & t-2 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} -6 & t+5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} t-5 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + (t-2)\begin{vmatrix} t-5 & 4 \\ -6 & t+5 \end{vmatrix} \\ &= 2(3t-3) - 2(3t-3) + (t-2)(t^2-1) = (t-2)(t-1)(t+1) \end{aligned}$$

$\lambda = -1, 1, 2$

$$\vec{x} \in W(-1; T_A) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -4 & -2 \\ 6 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} \in W(1; T_A) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 6 & -6 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} \in W(2; T_A) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 6 & -7 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{x} = c\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} g_{T_A}(t) &= \left| tE - \begin{bmatrix} 7 & 12 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} t-7 & -12 & 0 \\ 2 & t+3 & 0 \\ -2 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-7 & -12 \\ 2 & t+3 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)(t^2-4t+3) = (t-1)(t-1)(t-3) \end{aligned}$$

$\lambda = 1, 3$

$$\vec{x} \in W(1; T_A) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 12 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} \in W(3; T_A) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 12 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{x} = c\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$