固有値と固有ベクトル

Jacques Garrigue, 2017 年 12 月 8 日

固有ベクトル　T をベクトル空間 V の線形変換とする．

$$T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$$

をみたす λ を T の固有値という．そのときの $\vec{u}$ を固有値 λ に属する T の固有ベクトルという．

例題　$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\vec{x}$ の固有ベクトルであることを確認せよ．属する固有値も求めよ．

固有空間　ベクトル空間 V の線形変換 T の固有値 λ に対し

$$W(\lambda; T) = \{\vec{u} \in V \mid T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$$

が T の固有値 λ の固有空間という．$W(\lambda; T)$ の零でないベクトルが λ の固有ベクトルである．

例題　$W(\lambda; T)$ が V の部分空間であることを確認せよ．

　T_A を正方行列 A から作った $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換とすると，$W(\lambda; T_A)$ は $(\lambda E - A)\vec{x} = \vec{o}$ の解空間と同じである．

固有多項式　正方行列 A に対し，

$$g_A(t) = \left| \, tE - A \, \right|$$

を A の固有多項式という．$g_A(t) = 0$ の根を A の固有値という．

例題　$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ の固有多項式を因数分解せよ．

定理 5.3.1 λ が T_A の固有値であることが，$g_A(\lambda) = 0$ と同値である．

証明　λが T_Aの固有値である $\Leftrightarrow \mathrm{null}(\lambda E - A) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{rank}(\lambda E - A) \neq n$
$\Leftrightarrow \lambda E - A$ が正則ではない $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0 \Leftrightarrow g_A(\lambda) = 0$

例　$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると，T_A を $\boldsymbol{C}^2$ の線形変換とみることができ，A の固有値が複素数になる．

例題

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値多項式を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の線形変換 T_A の固有値を求めよ．

(3) T_A の各固有値の固有空間を求めよ．

定理 5.3.2 (ケイリー・ハミルトン) $g_A(t)$ が正方行列 A の固有多項式なら，$g_A(A) = O$.

線形変換の固有多項式　有限次元空間 V の線形変換 T の 2 つの基に関する表現行列の固有多項式を考える．基 $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ に関して $(T(\vec{u}_1), \ldots, T(\vec{u}_n)) = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)A$ で，$g_A(t) = \left| \ tE - A \ \right|$.
同様に，$(T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)B$ で，$g_B(t) = \left| \ tE - B \ \right|$.
　$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)P$ とすると，$B = P^{-1}AP$. そのとき，

$$\begin{aligned} g_B(t) = & \left| \ tE - B \ \right| = \left| \ tP^{-1}EP - P^{-1}AP \ \right| = \left| \ P^{-1}(tE - A)P \ \right| \\ = & \left| \ P \ \right|^{-1} \left| \ tE - A \right| \left| \ P \ \right| = \left| \ tE - A \ \right| = g_A(t) \end{aligned}$$

　このため，$g_A(t)$ を $g_T(t)$ と書き，T の固有多項式ともいう．

定理 5.3.3 T がベクトル空間 V の線形変換とする．λ が T の固有値であることが，$g_T(\lambda) = 0$ と同値である．

例題　$\boldsymbol{R}[x]_2$ の線形変換

$$T(f(x)) = f(1 + 2x)$$

(1) T の固有値多項式を求めよ．

(2) T の固有値を求めよ．

(3) T の各固有値の固有空間を求めよ．