

# 線形写像の空間と表現行列

Jacques Garrigue, 2017 年 11 月 24 日

**線形写像の空間**  $\mathbf{R}$  上のベクトル空間  $U$  と  $V$  が与えられたとき,  $U$  と  $V$  の間の線形写像を全て集めた集合を  $\text{Hom}(U, V)$  と書く.  $\text{Hom}(U, V)$  もまた  $\mathbf{R}$  上の線形空間である. 特に

- (1) 常に  $\vec{o}$  を返す写像  $O$  は  $\text{Hom}(U, V)$  に含まれる.
- (2)  $T, S \in \text{Hom}(U, V)$  とする,  $T + S$  を  $(T + S)(\vec{x}) = T(\vec{x}) + S(\vec{x})$  と定義すると,  $T + S \in \text{Hom}(U, V)$ .
- (3)  $T \in \text{Hom}(U, V)$ ,  $c \in \mathbf{R}$  とする,  $cT$  を  $(cT)(\vec{x}) = c \cdot T(\vec{x})$  と定義すると  $cT \in \text{Hom}(U, V)$ .
- (4) 線形空間  $U$  の恒等関数  $Id$  は  $\text{Hom}(U, U)$  に含まれる.
- (5)  $T \in \text{Hom}(U, V)$ ,  $S \in \text{Hom}(V, W)$  とすると, その合成  $S \circ T$  が  $\text{Hom}(U, W)$  に含まれる.

**線形変換**  $\text{Hom}(U, U)$  の線形写像を  $U$  の線形変換という.

**例** 任意の  $\mathbf{R}$  上のベクトル空間  $U$  において,  $T(\vec{x}) = c\vec{x}$  というスカラー倍変換は線形変換である.

**基の変換行列** 有限次元ベクトル空間  $U$  の 2 つの基  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  と  $\{\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$  が与えられたとき, 片方がもう一方の 1 次結合として書ける.

$$(\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)P$$

その正則行列  $P$  は  $\{\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$  から  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  への基の変換行列という.  $P$  は恒等写像  $Id$  の  $U$  の 2 つの基底  $\{\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$  と  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  に関する表現行列でもある.

$$(Id(\vec{u}'_1), \dots, Id(\vec{u}'_n)) = (\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)P$$

**合成の表現行列**

- (1)  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ ,  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ ,  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell\}$  を  $U, V, W$  の基,
- (2)  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  と  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$  に関する  $T$  の表現行列を  $A$ ,
- (3)  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$  と  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell\}$  に関する  $S$  の表現行列を  $B$

とすると,  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  と  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell\}$  に関する  $S \circ T$  の表現行列は  $BA$  である. すなわち,

$$(S(T(\vec{u}_1)), \dots, S(T(\vec{u}_n))) = (S(\vec{v}_1), \dots, S(\vec{v}_m))A = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell)BA$$

**定理 5.2.1**  $T \in \text{Hom}(U, V)$  とする.

- (1)  $T$  の  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  と  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$  に関する表現行列が  $A$ ,

- (2)  $T$  の  $\{\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$  と  $\{\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_m\}$  に関する表現行列が  $B$ ,
- (3)  $\{\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$  から  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  への基の変換行列が  $P$ ,
- (4)  $\{\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_m\}$  から  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$  への基の変換行列が  $Q$

ならば,

$$B = Q^{-1}AP$$

**証明**  $T$  の線形性と  $(\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)P$  より

$$(T(\vec{u}'_1), \dots, T(\vec{u}'_n)) = (T(\vec{u}_1), \dots, T(\vec{u}_n))P = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)AP$$

一方

$$(T(\vec{u}'_1), \dots, T(\vec{u}'_n)) = (\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_m)B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)QB$$

$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$  が 1 次独立なので,  $AP = QB$ , 両辺に  $Q^{-1}$  をかけると  $B = Q^{-1}AP$ .

**定理 5.2.2**  $T \in \text{Hom}(U, U)$  について

- (1)  $T$  の  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  に関する表現行列が  $A$ ,
- (2)  $T$  の  $\{\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$  に関する表現行列が  $B$ ,
- (3)  $\{\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$  から  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  への基の変換行列が  $P$

ならば,

$$B = P^{-1}AP$$

**例題**  $\mathbf{R}^2$  の線形変換  $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}$  の基  $\left\{ \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  に関する表現行列を求めよ.

**例題**  $\mathbf{R}[x]_2$  の線形変換  $T(f) = f'(x)x + f(0)x^2 + f(1)$  について

- (1) 基  $\{1, x, x^2\}$  に関する  $T$  の表現行列  $A$  を求めよ.
- (2) 基  $\{1 + x, x + x^2, x^2\}$  に関する  $T$  の表現行列  $B$  を求めよ.