線形写像

Jacques Garrigue, 2017 年 11 月 10 日

線形写像　U, V を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする．U から V への関数 T 以下の 2 条件をみたすとき，線形写像という．

(1) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$　$(\vec{u}, \vec{v} \in U)$

(2) $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$　$(c \in \boldsymbol{R}, \vec{u} \in U)$

線形写像は 1 次写像ともいう．任意の $\vec{u}$ について $T(\vec{u}) = \vec{o}$ であるとき，T を零写像という．

例　A が $m \times n$ 行列のとき

$$T_A(\vec{x}) = A\vec{x} \quad (\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n)$$

は線形写像である．

例　$C^1(a, b)$ を区間 (a, b) で微分可能かつ導関数が連続な実数関数のベクトル空間とする．

$$Der(f(x)) = f'(x)$$

は $C^1(a, b)$ から $C(a, b)$ への線形写像である．

像と核　T が U から V への線形写像のとき，

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\vec{u}) \mid \vec{u} \in U\}$$

は T の像といい，$T(U)$ とも書く．また

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\vec{u} \in U \mid T(\vec{u}) = \vec{o}_V\}$$

は T の核という．

定理 5.1.1 T は U から V への線形写像とする．

(1) $\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間である．

(2) $\mathrm{Ker}(T)$ は V の部分空間である．

階数と退化次数

- $\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ は T の階数という，
- $\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$ は T の退化次数という．

例題　A が $m \times n$ 行列のとき，$\mathrm{null}(T_A) + \mathrm{rank}(T_A)$ を計算せよ．
　ヒント：定理 4.4.3 を使う．

定理 5.1.2 T が U から V への線形写像のとき，

$$\mathrm{null}(T_A) + \mathrm{rank}(T_A) = \dim(U)$$

表現行列　T が U から V への線形写像で，U と V がとも有限次元ベクトル空間とする．U の基 $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$，$V$ の基 $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ を決めておく．$T(\vec{u}_1), \ldots, T(\vec{u}_n)$ は V のベクトルなので，$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ の 1 次結合として書ける．これを

$$(T(\vec{u}_1), \ldots, T(\vec{u}_n)) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m)A \quad (A : m \times n \text{ 行列})$$

と表したとき，行列 A を U の基 $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$，$V$ の基 $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ に関する T の表現行列という．

例　$\boldsymbol{R}[x]_3$ から $\boldsymbol{R}[x]_2$ への線形写像 $T(f(x)) = f'(x)$ の $\{1, x, x^2, x^3\}$ と $\{1, x, x^2\}$ に関する表現行列は以下のとおりである．

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$