ベクトル空間の基と次元

Jacques Garrigue, 2017 年 10 月 27 日

生成　V のベクトル $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ がベクトル空間 V を生成するとは，V の全てのベクトルが $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ の 1 次結合として書けることをいう．

例　$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ が $\boldsymbol{R}^n$ を生成する．

ベクトル空間の基　$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ が次の 2 つの条件をみたすときに V の基 (または基底) である．

(1) $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ は 1 次独立である．

(2) $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ は V を生成する．

例　$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ が $\boldsymbol{R}^n$ の基である．標準基底と呼ばれている．

定理 4.4.1 ベクトル空間 V の任意の基のベクトルの個数が一定である．

ベクトル空間の次元　ベクトル空間 V の基のベクトルの個数を V の次元といい，$\dim(V)$ と書く．特に，零ベクトルすか含まないベクトル空間を零空間といい，その次元が 0 である．有限個のベクトルから作られて基を持つベクトル空間を有限次元ベクトル空間という．

例　$\dim(\boldsymbol{R}^n) = \dim(\boldsymbol{R}_n) = n$

例　$\boldsymbol{R}[x]_n$ の元 $1, x, \dots, x^n$ が 1 次独立なので，$\dim(\boldsymbol{R}[x]_n) = n + 1$.

定理 4.4.2 ベクトル空間 V の *1* 次独立の最大個数が有限であることと，V が有限次元ベクトル空間であることは同値である．そのとき

$$\dim(V) = V \text{ の } 1 \text{次独立の最大個数}$$

例題　次の解空間の次元と 1 組の基を与えよ．

$$W = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

ヒント：解のパラメーター表現を与えると，同次形なので，それぞれのパラメーターの係数ベクトルが基になる．

基本解　同次形の連立 1 次方程式の解空間の 1 組の基を，その連立 1 次方程式の基本解という．

例　以下の 3 ベクトルが $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$ の基本解の 1 つである．

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

解の自由度　連立 1 次方程式が解を持つとき, 簡約な行列の形を見ると, 主成分を含まない列に当たる変数について, どんな値を決めても解が存在する. そういう変数の数を**解の自由度**と呼ぶ. 階数の定義から, 係数行列 A が $m \times n$ 行列とすると, 解の自由度は

$$n - \mathrm{rank}(A)$$

定理 4.4.3 A は $m \times n$ 行列とする．同次形の連立 *1* 次方程式 $A\vec{x} = \vec{o}$ の解空間の次元は

$$\dim(\{\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{o}\}) = n - \mathrm{rank}(A)$$

ベクトルの集合で生成される部分空間　$\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_t$ が V のベクトルならば，

$$\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_t \rangle_{\boldsymbol{R}} = \{c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_t\vec{u}_t \mid c_i \in \boldsymbol{R}\}$$

は $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_t$ から生成された V の部分空間である．

定理 4.4.4

$$\dim(\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_t \rangle_{\boldsymbol{R}}) = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_t\} \text{ の } \mathit{1} \text{ 次独立な最大個数}$$

定理 4.4.5 $\dim(V) = n$ とする．V のベクトル $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ について，以下の *3* 条件は同値である．

(1) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ は V の基である．

(2) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ は *1* 次独立である．

(3) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ は V を生成する．

例　$\dim(\boldsymbol{R}^3) = 3$ から，以下の 1 次独立な 3 つのベクトルは $\boldsymbol{R}^3$ の基である．

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

例題　$\{x + x^2, 1 - x^2, x\}$ が $\boldsymbol{R}[x]_2$ であることを証明せよ．