

# 1 次独立の最大個数

Jacques Garrigue, 2017 年 10 月 20 日

**1 次独立の最大個数** ベクトルの集合  $X$  の中に  $r$  個の 1 次独立なベクトルが存在し,  $r+1$  個の 1 次独立なベクトルが存在しないとき,  $r$  を 1 次独立の最大個数という.

**定理 4.3.1**  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  が  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$  の 1 次結合として書けるとき,  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  の 1 次独立の最大個数が  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$  の 1 次独立の最大個数以下である.

**定理 4.3.2** 「 $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$  の 1 次独立な最大個数は  $r$  である」と, 「 $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$  の中に  $r$  個の 1 次独立なベクトルがあり, 残りの  $m-r$  のベクトルがこの  $r$  個の 1 次結合として書ける」は同値である.

**例題** 次のベクトルの 1 次独立な最大個数とその具体的なベクトルを与え, 残りのベクトルをその 1 次結合として表現せよ.

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ヒント:  $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_5]$  を  $B = [\vec{b}_1 \dots \vec{b}_5]$  に簡約すると,  $A\vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow B\vec{x} = \vec{o}$  がなりたち,  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_5$  と  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_5$  が同じ 1 次関係を持つので, 1 次関係を持たない最大個数を見付け, それを元に他のベクトルの 1 次結合を見付けなければならない.

簡約された行列において, 主要成分を含む列が 1 次関係を持たない. 逆に, 主要成分を含まない列は主要成分を含む列の 1 次結合として書ける. 上の定理を使うと, 1 次独立な最大個数は主要成分を含む列の数, すなわち  $\text{rank}(A)$  であることが分かる.

**定理 4.3.3**  $A$  の列ベクトルの 1 次独立な最大個数と  $A$  の行ベクトルの 1 次独立な最大個数はともに  $\text{rank}(A)$  である.

**定理 4.3.4**  $A$  を  $n$  次正方行列とする. 以下の 3 つの条件が同値である.

- (1)  $A$  は正則行列
- (2)  $A$  の列ベクトルが 1 次独立である
- (3)  $A$  の行ベクトルは 1 次独立である

定理 4.3.5 行列の簡約化は唯一通り決まる.

証明  $B$  を  $A$  の簡約化とする. 簡約化手続の性質として,  $A\vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow B\vec{x} = \vec{o}$  かつ  $B$  は簡約である.  $B$  の最初の  $k$  列が一意に決まることを  $k$  に関する帰納法で証明する.

- $k = 1$  の場合.  $\vec{a}_1 = \vec{o}$  のとき,  $\vec{a}_1 = 0\vec{a}_2 + \dots + 0\vec{a}_3$  から  $\vec{b}_1 = \vec{o}$ . そうでないとき, 簡約の定義より  $\vec{b}_1 = \vec{e}_1$  (最初の成分だけが 1).
- $k + 1$  の場合.  $B$  の最初の  $k$  列が一意に決まると仮定する.  $I \subset \{1, \dots, k\}$  が列  $k$  までの主成分を含む列の位置を指す.  $\#(I)$  は  $I$  の元の数を表す.  
 $\vec{a}_{k+1}$  が  $\{\vec{a}_i \mid i \in I\}$  の 1 次結合  $\sum_{i \in I} c_i \vec{a}_i$  として書けるとき, 定理 4.2.5 より, その 1 次結合の係数は唯一である. そのとき  $\vec{b}_k = \sum_{i \in I} c_i \vec{b}_i$  はその係数のベクトルである ( $\{\vec{b}_i \mid i \in I\}$  は  $\vec{e}_1$  から  $\vec{e}_{\#(I)}$  までの基本ベクトルなので,  $i \in I$  の小さい順に  $c_i$  を並べ, 残りを 0 で埋める).  
 1 次結合として書けないとき,  $\vec{b}_k = \vec{e}_{\#(I)+1}$ , すなわちまだ主成分を含まない最初の行のみが 1 でなければならない.

$k = n$  のとき, 定理が得られる.

定理 4.3.6  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$  が 1 次独立で,

$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)A$$

とする.

- (1)  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  は  $A$  の列ベクトル  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  と同じ 1 次関係をもつ.
- (2)  $m = n$  のとき, 「 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  が 1 次独立」と「 $A$  が正則行列」は同値である.

例題 次の  $\mathbf{R}[x]_3$  のベクトルの 1 次独立な最大個数とその具体的なベクトルを与え, 残りのベクトルをその 1 次結合として表現せよ.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + x + 3x^2 & f_2(x) &= 1 + 2x - x^3 \\ f_3(x) &= 1 + 3x - 3x^2 - 2x^3 & f_4(x) &= -2 - 4x + x^2 - x^3 \\ f_5(x) &= -1 - 4x + 7x^2 \end{aligned}$$

## 問題の回答

4.2.6  $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$  とおくと, 1 次結合は  $\vec{v} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)C$  と書ける.

もしも  $D$  についても  $\vec{v} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)D$  ならば, 定理 4.2.5 より  $C = D$  となり, 係数は唯一通りしかない.